Stochastische Modelle für den Funkkanal und deren Anwendung

Von der Fakultät für Elektrotechnik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Ingenieur
Herbert Steffan

aus Wanne Eickel

Referent: Universitätsprofessor Dr.-Ing. B. Walke
Korreferent: Universitätsprofessor Dr.-Ing. L. Kittel
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1995

Stochastische Modelle für den Funkkanal und deren Anwendung

Herbert Steffan

Stochastische Modelle für den Funkkanal und deren Anwendung

Herbert Steffan

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen.

Neben den bekannten Gilbert-Elliott-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerwahrscheinlichkeit für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt.

Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren.

Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Mit logischen Formalismen läßt sich dann das Zusammenwirken des Funkkanals mit anderen Modulen, wie sie in Kommunikationssystemen vorkommen, einheitlich beschreiben.

Darüber hinaus wurden einige anwendungsbezogene Untersuchungen vorgenommen:

Es werden Methoden vorgestellt, mit deren Hilfe erstmalig die Empfangsqualität eines Mobilfunkteilnehmers unter Berücksichtigung des zeitveränderlichen mehrpfadigen Funkkanals innerhalb eines Szenarios mit einer die Funkqualität beeinflussenden Morphostruktur und weiteren, als potentielle Störer wirkenden Teilnehmern ermittelt werden kann.
Dazu wird auf den Entwurf realistischer und numerisch effizienter Modelle für den Mobilfunkkanal besonderes Augenmerk gelegt. Ebenso wird für den Empfänger ein adäquates Modell entwickelt, das den potentiell frequenzselektiven Mobilfunkkanal entsprechend berücksichtigt. Für beide Problemkreise werden Zustandsmodelle vorgeschlagen.
Das von L. KITTEL vorgeschlagene Zustandsmodell für den Mobilfunkkanal wird in der folgenden Arbeit auf mehr als zwei Zustände erweitert. Es werden über den bisher bekannten Algorithmus zur Parametrisierung, der Pegelkreuzungsraten verwendet, weitere entwickelt und vergleichend analysiert, nämlich:
– optimierte Markov-Modelle nach der Methode, die Pegelkreuzungsraten verwendet,
– Markov- und semi-Markov-Modelle, die mit Schätzern parametrisiert werden,
– Markov- bzw. semi-Modelle, die einen zyklischen Zustandsraum haben.
Der sich bei den Markov-Modellen einstellende Fehlerprozeß wird durch die zeitdiskrete Variante eines aus der Verkehrstheorie bekannten stochastischen Prozesses beschrieben. Charakteristische Eigenschaften in bezug auf die in Empfängern und Kommunikationssystemen folgenden Module werden abgeleitet.

Mit den beschriebenen Modellen ist es erstmalig möglich, analytische Abschätzungen von Interleavingverfahren unter Berücksichtigung von zeitvarianten Funkkanälen vorzunehmen.

Insbesondere ist erstmalig der Gewinn von Frequenzsprungverfahren unter Berücksichtigung von mehreren, die Übertragung beeinflussenden Stationen simulativ ermittelt.

Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

Überblick und Zusammenhang der Kapitel[1]

Nach der einleitenden Darstellung der Grundlagen, Kap. 1, folgt in Kap. ?? ein Rückblick über Zustandsmodelle für den Funkkanal, die schon länger bekannt sind. Die Konstruktionsmethode über Fehlerlauflängen erweist sich zwar als komplex, erbringt aber sehr originalgetreue Modelle. In Kap. ?? erfolgt ein Ausblick auf *erneuerungstheoretische Methoden*, die auch bei den einfachen Zustandsmodellen angewendet werden können.
In Kap. ?? werden Motive für weitere Überlegungen bzgl. der Zustandsmodelle erläutert. Kap. ?? führt in die traditionelle lineare Systemtheorie zweier Veränderlicher mit Anwendung auf den Funkkanal ein. Kap. ?? leitet zur stochastischen Betrachtungsweise über und bringt die notwendigen Definitionen und Grundlagen. In Kap. ?? wird die *Streufunktion* als wichtiges Ergebnis der stochastischen Modellierung des Funkkanals vorgestellt.
In Kap. ?? werden dann verallgemeinerte Gilbert-Elliott-Modelle vorgestellt und verschiedene neue Algorithmen zur Parametrisierung entwickelt. Dabei steht zunächst die Nachbildung des *klassischen Doppler-Spektrums der Streufunktion* im Vordergrund. Kap. ?? leitet von der analytischen Parametrisierungsmethode zur Parameterschätzung über, während in Kap. ?? schließlich semi-Markov-Prozesse zur Modellierung des Funkkanals vorgeschlagen werden. Den größten Beitrag zur Nachbildung des klassischen Doppler-Spektrums erbringt ein angepaßter, d.h. *zyklischer* Zustandsraum, Kap. ??. Prozesse mit diesem Zustandsraum werden bezüglich ihrer Fehlerabstandsverteilungen mit den Musterprozessen verglichen.
Nachdem nun einige erneuerungstheoretische Überlegungen folgen, die die *analytische Be-*

[1] Struktureller Zusammenhang, während umseitige Zusammenfassung inhaltlich orientiert ist.

schreibung des Funkkanals und das Auftreten der Fehler ermöglichen, Kap. ?? und Kap. ??, werden konkrete Eigenschaften des Fehlerprozesses hergeleitet, Kap. ??.
Der in Kap. ?? vorgestellte Prozeß, der DMAP (Discrete Markov Arrival Process), umfaßt sowohl den in Kap. ?? vorgestellten Prozeß, den MMBP (Markov Modulated Poisson Process), wie auch den sich bei dem einfachen Zustandsmodell, s. Kap. ??, einstellenden Fehlerprozeß, s. vergleichend Kap. ?? u. ??.
In Kap. ?? werden die bisher angestellten Überlegungen auf Mehrpfadmodelle ausgedehnt und in ein *Empfängermodell* integriert. So können selbst die nichtlinearen Einflüsse der evtl. auch adaptiven Entzerrungsalgorithmen bei der Modellierung berücksichtigt werden.
In Kap. ?? werden das entwickelte Empfängermodell auf ein Zustandsmodell abgebildet und die entsprechenden Symbolfehlerraten ermittelt.
Kap. ?? stellt eine Anwendung der Zustandsmodelle für den Funkkanal dar, wobei eine Simulationsumgebung geschaffen wird, mit der das *Kommunikationsverhalten von mehreren hundert Stationen simulativ* nachgebildet werden kann.
Kap. ?? beschäftigt sich mit der *analytischen Bewertung von Funknetzen.* Dabei wird zunächst das in der Literatur häufig verwendete *Schwellenmodell* neu parametrisiert und den abgeleiteten Zustandsmodellen vergleichend gegenübergestellt. Nach einem theoretischen Exkurs bzgl. der Paketfehlermodelle folgen zwei Anwendungsbeispiele: Ein Wettbewerbsszenarium in einem zellularen System, Kap. ??, und die Fehlausrichtung von gerichteten Antennen werden analytisch bewertet, Kap. ??.
In Kap. ?? werden Beiträge zu einer *Systemtheorie für digitale Kommunikationssysteme* unter Einschluß stochastischer Medien, z.B. des Funkkanals vorgestellt, so daß die vorgestellten Prozesse als stochastische Automaten in die traditionellen automatentheoretischen Untersuchungen integriert werden können.

Summary

In this dissertation a new interpretation of state models for the radio channel from a renewal theoretical and stochastic automata theoretical point of view is given.

In addition to the well known Gilbert-Elliott model two other models are introduced. They are based on quantisation of the stochastic processes which model the radio channel. First non frequency selective channels are modelled by determining symbol error rates for certain level intervals of the signal transmitted over the channel. The frequency selective channel is modelled by a state model for each radio path. The necessary channel estimation and equalisation is done by a receiver model. The resulting symbol error rate is determined for all combinations of states of the multipath model.

If the error process is interpreted as a *renewal process*, important properties can be derived, which are new.

Additionally to this renewal theoretical interpretation a stochastic automata theoretical interpretation can be made which considers the error process as output of stochastic automata. The cooperation of the radio channel with other modules of the communication system can be uniformly described by using logical formalisms.

Further more some application oriented investigations are made:

Methods are presented that allow for the first time to calculate the signal quality of a mobile subscriber in a wide spread mobile scenario with hundreds of subscribers. For that the time variant multipath radio channel influenced by the environment is taken into account. The design of realistic and numerically efficient models for the radio channel is the most important topic in this context. In the same way a suitable model for the receiver has to be developed which also includes the potentially frequency selective radio channel. State models are proposed to solve both problems.
The state model presented by L. KITTEL is extended to a model with more than two states. The well known algorithm for parameterizing the model uses level crossing rates. Beside this algorithm some new algorithms are presented:
– optimized Markov model using level crossing rates,
– Markov and semi-Markov models parameterized by estimators,
– Markov and semi-Markov models with cyclic state space.

The error process which is obtained from Markovian state models is described by the discrete time version of a process which is well known from queueing theory. By these means properties of the error process can be calculated easily.

Using the models described, it is possible for the first time to approximate analytically the performance of interleaving algorithms.

Also it is possible to determine the gain of frequency hopping considering several subscribers which may disturb the transmission of any other.

This leads to system theoretical considerations which uniformly describe all modules of a communication system.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes zur (Tele -) Kommunikation **1**

1.1 Gegenwärtige zellulare Systeme . . . 2
1.2 Zukünftige Entwicklungen . . . 2
1.3 Das ISO/OSI-Referenzmodell . . . 3
1.4 Zuteilung der Funkressourcen . . . 5
1.4.1 Frequenzmultiplex . . . 5
1.4.2 Zeitmultiplex, TDM . . . 6
1.4.3 Codemultiplex, CDM . . . 6
1.4.3.1 Direct Sequencing . . . 7
1.4.3.2 Frequency Hopping . . . 7
1.4.4 Raummultiplex, SDM . . . 7
1.4.5 Zugriffs-Verfahren . . . 8

2 Modelle für den Funkkanal **9**

2.1 Einfache Zustandsmodelle für den Mobilfunkkanal . . . 10
2.1.1 Gilbert-Modell . . . 12
2.1.2 Fritchmann Modell . . . 13
2.1.3 Einfache Zustandsmodelle für den Mobilfunkkanal als diskrete Markovsche Ankunftsprozesse . . . 16
2.2 Motivation für weiterführende Untersuchungen . . . 17
2.3 Deskriptive Modelle für den Funkkanal, Systemtheoretische Modellierung . . . 18
2.3.1 Systemtheoretische Modellierung . . . 18
2.3.1.1 Zusammenstellung der acht Systemfunktionen nach BELLO 18
2.3.2 Definitionen zur Stochastik . . . 21
2.3.3 Stochastische Modellierung, Systemkorrelations-Funktionen . . . 22
2.3.4 WSSUS-Systeme . . . 22
2.3.4.1 Weitere Maße . . . 24
2.3.4.2 Die unabhängig zeit- und frequenzdispersiven WSSUS-Syst. 25
2.3.5 Das Modell nach COST 207 . . . 25
2.4 Methoden im Frequenzbereich zur Generierung von korrelierten Sequenzen . . . 26
2.5 Weitere Modelle . . . 28
2.6 Anwendung stochastischer Prozesse zur Modellierung des Funkkanals . . . 28
2.6.1 Definition der ARMA-Prozesse . . . 30

3 Verallgemeinerte Gilbert-Elliott-Modelle **31**

3.1.1 Markov-Modelle für den Funkkanal . . . 31
3.1.2 Grundlegendes zu Pegelkreuzungsraten . . . 33

3.1.3 Approximation der Übergangswahrscheinlichkeiten mit Pegelkreuzungsraten . . . 34
3.1.3.1 Eigenschaften von Jakobi-Matrizen . . . 37
3.1.3.2 Optimierter Algorithmus unter Verwendung der Pegelkreuzungsraten . . . 39
3.1.4 Schätzen der Übergangswahrscheinlichkeiten . . . 40
3.1.5 Nutzung spezieller Eigenschaften von Markov-Ketten für die Modellierung des Funkkanals . . . 41
3.1.5.1 Stationäre Wahrscheinlichkeit . . . 41
3.1.5.2 Mittelwert . . . 41
3.1.5.3 Globale Korrelation . . . 42
3.1.5.4 Spektrale Eigenschaften . . . 44
3.1.5.5 Mathematische Eigenschaften von stochastischen Matrizen . . . 44
3.1.5.6 Verlauf des Spektrums . . . 47
3.1.5.7 Verteilungsdichtefunktion der Verbindungsintervalle . . . 49
3.1.5.8 Korrelation der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Dauern 52
3.1.6 Semi-Markov-Prozesse zur Modellierung des Funkkanals . . . 53
3.1.7 Markov, bzw. semi-Markov-Prozesse mit zyklischem Zustandsraum . . . 56
3.1.7.1 Direkte Methode . . . 56
3.1.7.2 Matrizentheoretische Methode . . . 57
3.1.8 Vergleich der Algorithmen zur Parametrisierung . . . 58

4 Fehlerprozesse der verallgemeinerten Gilbert-Elliott-Modelle 65
4.1 Der Markov-Modulierte-Poisson-Prozeß . . . 65
4.2 Die zeitdiskrete Variante des MMPP, der MMBP . . . 67
4.2.1 Der diskrete Markov'sche Ankunftsprozeß als Modell für den Fehlerprozeß . . . 72
4.2.2 Einfache Zustandsmodelle für den Funkkanal als diskrete Markovsche Ankunftsprozesse . . . 73
4.2.3 Eigenschaften von semi-Markov-Prozessen . . . 73
4.2.3.1 Mittelwerte der Zwischenfehler-Abstände . . . 74
4.2.3.2 Wahrscheinlichkeit für k-Fehler/Nicht-Fehler in Folge . . . 75
4.2.3.3 Fehlerdichten . . . 76
4.2.3.4 Mittlere Burstlänge, mittlere Nicht-Burstlänge . . . 76
4.2.3.5 Korrelation der Zwischenfehler-Abstände . . . 77
4.2.3.6 Korrelation der Fehler- und Nichtfehler-Abstände . . . 78
4.2.4 Eigenschaften von endlichen Sequenzen . . . 78
4.2.4.1 Die Zählfunktion . . . 78
4.2.4.2 Mittlere Anzahl der Fehler in einem Intervall . . . 79
4.2.5 Messungen am Fehlerprozeß . . . 79
4.2.6 Vergleichende Zusammenfassung . . . 81
4.3 Modelle für frequenzselektive Mobilfunkkanäle . . . 83

5 (Zustands-) Modelle für Empfänger **85**
5.1 Der Empfänger . . . 85
5.2 Struktur eines GSM-Empfängers . . . 86
5.2.1 GMSK-Modulationsverfahren . . . 87
5.3 Korrelative Kanalschätzung . . . 87
5.4 Adaptive Entzerrer, iterative Kanalschätzung . . . 88
5.5 Zustandsmodelle für den Empfänger . . . 90

6 Eine Simulationsumgebung zur Nachbildung eines zellularen Funknetzes **95**
6.1 Geländestruktur und Bebauung . . . 95
6.2 Abschattung und Mobilität . . . 97
6.3 Mehrwegeausbreitung und Frequenzselektivität . . . 98
6.4 Einführung in die Funkübertragung des GSM . . . 99
6.4.1 Multiplexverfahren . . . 99
6.4.2 Logische Kanäle . . . 99
6.4.3 Burst-Strukturen . . . 100
6.5 Fehlersicherung . . . 101
6.5.1 Faltungscodes . . . 101
6.6 Der Interleaver . . . 102
6.7 Ergebnisse der stochastischen Simulation . . . 105
6.8 Untersuchung von Frequenzsprungverfahren . . . 105
6.9 Zusammenfassung . . . 108

7 Herleitung von Paketfehlermodellen **109**
7.1 Gedächtnislose Paketfehlermodelle . . . 109
7.1.1 Paketfehlermodelle auf der Basis geometrischer Prozesse . . . 109
7.1.2 Schwellenmodelle . . . 111
7.1.3 Auf Zustandsmodellen basierende Paketfehlermodelle . . . 112
7.1.3.1 Matrix-Binomial Modell . . . 113
7.1.3.2 Approximation durch eine Matrix-Exponential-Funktion . . . 114
7.2 Anwendung der Modelle . . . 115
7.2.1 Das Problem der Unfairness beim Kanalzugriff in zellularen Systemen 115
7.2.2 Durchsatz bei gerichteten Antennen, Einfluß der Fehlausrichtung . . . 117
7.3 Gedächtnisbehaftete Paketfehlermodelle . . . 122
7.3.1 Fehlermodelle erster Art . . . 122
7.3.1.1 Exakte Modelle . . . 123
7.3.2 Fehlermodelle zweiter Art . . . 124
7.3.3 Theoretische Modelle für das Interleaving . . . 124

8 Beiträge zu einer Systemtheorie für digitale Kommunikationssysteme **127**
8.1 Systemtheoretische Modellierung . . . 127
8.2 Theorie stochastischer Automaten . . . 128
8.3 Verschmelzen von FSS . . . 131
8.4 Anwendungen . . . 135

8.5 Grenzbetrachtungen 136
8.6 Durchsatz eines einfachen Quittierungsverfahrens 137
8.7 Zusammenfassung und Ausblick 141

A Abkürzungsverzeichnis **143**

B Grundlegendes zur Matrizenrechnung **145**

Literaturverzeichnis **149**

Grundlegendes zur (Tele -) Kommunikation

Kommunikation ist Korrektur von Fehlern.
Gregory Bateson, Jürgen Ruesch[1].

Die Kommunikation steht für zwei vollkommen entgegengesetzte Aspekte des menschlichen Lebens, einmal für die Überwindung der Einsamkeit, indem die andere Person durch Kommunikation in einem präsent wird, zum anderen für die Erkennntnis, daß diese Präsenz nur in der Fantasie vorhanden ist, was den Sprechenden wieder in die Einsamkeit zurückwirft.

Faszinierend bleibt die Fähigkeit des Menschen, sich dennoch immer wieder neu auf Kommunikation einzulassen und auch nonverbal und sogar unbewußt sich mitzuteilen.

Die *Unmöglichkeit nicht zu kommunizieren* wurde schon oft mit wissenschaftlicher Autorität konstatiert und ist nicht erst die Erfahrung, an einem nicht endenden Telefongespräch teilnehmen zu müssen.

Doch zunächst ein kurzer geschichtlicher Rückblick.

Die Geschichte des leitungsgebundenen Telefons begann mit der Patentierung des Telefons durch Alexander Bell. Sie währt nun schon 100 Jahre. Die Experimente von Maxwell, Marconi und Popov, die Maßgebliches zur Erforschung der Wellenausbreitung beigetragen haben, bereiteten den Weg für das drahtlose Telefon. Weitere bahnbrechende Erfindungen waren die der Diode (Flemming 1904) und die des Transistors (Bardeen, Brittain, Shockley 1948), die die Grundlage für alle Halbleiter-basierten Bauelemente bis hin zu VLSI (Very Large Integrated Circuit)-Schaltkreisen bilden.

Betrachtet man die Geschichte des drahtlosen Telefons, so ist es verwunderlich, daß eine weitere Verbreitung erst in der letzten Zeit erfolgte. Offensichtlich spielen nicht nur technische Möglichkeiten eine entscheidende Rolle, sondern auch, und gerade bei Vorgängen der über nationalstaatlichen Abstimmung, wie sie für internationale Telefonsysteme notwendig sind, organisatorische und strukturelle Voraussetzungen, für die die Europäische Gemeinschaft einen unterstützenden Rahmen bildete.

[1] In *Kommunikation: Die soziale Matrix der Psychatrie* wird von obengenannten Autoren eine Kommunikationstheorie entwickelt, die auf die Arbeiten von J. Habermas und N. Luhmann aufbaut und versucht, deren Ansätze zu vereinigen.

1.1 Gegenwärtige zellulare Systeme

Das erste europäische drahtlose Telefonsystem ist von CEPT (Conference of European Post and Telecommunication) unter der Bezeichnung CT1 standardisiert. Dieses analoge System arbeitet im 900MHz Bereich und unterstützt nur Punkt-zu-Punkt-Verbindungen. Handover während eines Gespräches ist in diesem für häuslichen Gebrauch konzipierten System unmöglich. Die Reichweite liegt bei lediglich 300m im Freien und 50m im Haus. Der CT2/CAI (Common Air Interface) Standard wurde 1988 vorgestellt und ist seit 1989 im Einsatz. Der entscheidende Unterschied zum CT1 liegt darin, daß das System eine größere Anzahl von Kanälen aufweist. Es arbeitet im Bereich von 864-868MHz. Die Basisstationen wurden neben häuslichem Gebrauch auch in öffentlichen Stellen aufgebaut.

C-450 ist das erste mit synchroner Signalübertragung arbeitende zellulare System, in dem die analoge Sprach-Übertragung im Frequenzbereich von 450 MHz erfolgt [?, ?].

Die gegenwärtig am weitesten verbreiteten zellularen Telefonsysteme sind D1 und D2. Sie sind auf Basis des europäischen Standards GSM (Global System for Mobile Communication) realisiert und übertragen bei 900MHz. Der Standard bietet gegenüber C-450 eine wesentlich größere Benutzerkapazität und Datenübertragungsdienste, ähnlich der des ISDN (Integrated Services Digitel Network), jedoch mit kleinerer Bitrate ($\leq$ 9.6kbit/s).

1992 ist das DECT- (Digital European Cordless Telecommunication-) System durch ETSI (European Telecommunications Standards Institute) als Standard verabschiedet worden. Das DECT-Konzept wurde so ausgelegt, daß ein Zugriff zu jeder Art von Telefonnetzen (öffentlich und privat) möglich ist [?]. Das System arbeitet mit 10 Frequenzkanälen, wodurch eine gegenüber CT2 erweiterte Systemkapazität von 120 logischen Kanälen erreicht wird. Punkt-zu-Mehrpunkt-Verbindung, Handover sowie kommende Rufe sollen ebenfalls ermöglicht werden.

Seit Mai 1994 nimmt ein weiterer Netzanbieter am Wettbewerb um Kunden teil: Das E-1-Netz nach dem ETSI/DCS 1800 Standard ist eher als D1/D2 in der Lage in Gebieten mit hohem Verkehrsaufkommen aufgrund von Kleinzellen Kunden adäquat zu versorgen. Der wesentliche Unterschied zum GSM-System ist die geringere Reichweite aufgrund einer maximalen Sendeleistung von 250mW für Handtelefone. Dadurch wird die Zellgröße verringert und eine wesentlich höhere Teilnehmerzahl ist möglich. DCS-1800 arbeitet bei 1.8GHz.

1.2 Zukünftige Entwicklungen

Das *Universal Mobile Telecommunications System* (UMTS) stellt ein Telekommunikationssystem der dritten Generation dar, das bis zum Jahr 2005 die Dienste der Festnetze PSTN (Public Switch Telephone Network) und ISDN (Integrated Services Digital Network) den mobilen Teilnehmern zugänglich machen soll. Dabei wird UMTS globales Roaming (engl. to roame, umherstreifen) ermöglichen, also weltweite Erreichbarkeit des Teilnehmers unter seiner persönlichen Nummer, anstreben. Darüber hinaus wird UMTS die Dienste der digitalen zellularen Mobilfunknetze der zweiten Generation integrieren. Diese sind insbesondere

GSM/DCS1800, (zellularer Mobilfunk), DECT (digitales schnurloses Telefon), TETRA (digitaler Bündelfunk), MODACOM (Daten-Paketbündelfunk), Ermes (Funkruf).

Die angestrebte Übertragungsrate beträgt 2Mbit/s, das empfohlene Frequenzband liegt bei 2GHz und hat eine Breite von 230MHz.

Ab 2010 soll UMTS durch das *Mobile Broadband System* (MBS) ergänzt werden. Dieses Telekommunikationssystem soll die Dienste des B-ISDN (Breitband-ISDN) den mobilen Teilnehmern verfügbar machen. Entsprechend werden Übertragungsraten zwischen 2 und 34Mbit/s angestrebt (höhere Bitraten für Mobilkommunikation scheinen heute technisch nicht realisierbar zu sein).

Im Gegensatz zu UMTS wird MBS wegen der hohen erwarteten Systemkosten lediglich in Gegenden mit hohem Verkehrsaufkommen, wie Metropolen und evtl. Autobahnen eingesetzt. Das technische Hauptmerkmal ist die Übertragung von ATM-Zellen, wie es auch im B-ISDN geschieht. Um interferenzarme Übertragung mit geringen Wiederverwendungsabständen der Frequenzkanäle und die erforderliche System-Frequenzbandbreite zu erhalten, wurde das 60GHz-Band von der CEPT für MBS vorgeschlagen. Das empfohlene Frequenzband ist in zwei Subbänder unterteilt, die eine Vollduplex-Verbindung ermöglichen.

Die Systemarchitektur und die Definition der Luftschnittstelle von MBS wird innerhalb des Forschungsprogrammes RACE II (Research and Development in Advanced Communications for Europe) der Europäischen Gemeinschaft entwickelt.

1.3 Das ISO/OSI-Referenzmodell

Offene Systeme folgen internationalen Standards, so daß eingesetzte Systeme herstellerunabhängig ohne zusätzliche Hilfmittel unmittelbar miteinander kommunizieren können.

Das von der ISO (International Standards Organisation) festgelegte Referenzmodell - ISO/-OSI Referenzmodell (OSI, Open System Interconnection) - definiert die Kommunikationsarchitektur von Teilnehmern und Bestandteilen offener Systeme. Das Referenzmodell ist dabei in drei Abstraktionsebenen - das OSI-Architekturmodell, die OSI-Dienste und die OSI-Protokolle - gegliedert.

Das OSI-Architekturmodell beschreibt durch die Festlegung von Organisations- und Konstruktionsmerkmalen allgemein den Aufgabenrahmen offener, verteilter Systeme. Die Beschreibung des Modells erfolgt hierarchisch gegliedert in sieben Schichten. Dadurch wird einerseits größtmögliche Übersichtlichkeit geschaffen und andererseits werden bei Änderungen innerhalb der Schichten Beeinflussungen auf benachbarte Schichten vermieden.

OSI-Dienste stellen bereits eine Konkretisierung des Architekturmodells dar. Dabei werden jedoch keine Aussagen über die Realisierung bzw. die Implementierung der einzelnen Dienste beschrieben. Unter dem Begriff *Dienst einer Schicht* ist die Zusammenfassung aller Möglichkeiten und Leistungsmerkmale zu verstehen, die einem Benutzer des Dienstes an einem Dienstzugangspunkt angeboten werden. Jede Schicht (N) stellt einer hierarchisch höher liegenden Schicht (N+1) einen Dienst zur Verfügung und ist selbst Dienstbenutzer

einer hierarchisch tiefer liegenden Schicht (N-1). Die Kommunikation zwischen Dienstbenutzer und Diensterbringer erfolgt mithilfe von Dienstprimitiven über Dienstzugangspunkte.

Im folgenden werden die Aufgaben der sieben Schichten des OSI-Referenzmodells beschrieben [?, ?]:

Die *Physikalische Schicht — Schicht 1* (Physical Layer), dient der Übertragung von Information über ein Übertragungsmedium. Hierzu wird der zu sendende Symbolstrom in eine für die Übertragung geeignete Form gewandelt und aus den empfangenen Signalen wieder ein Symbolstrom erzeugt. Für weite Teile der Arbeit wird als Medium der Funkkanal angenommen.

Die *Sicherungsschicht — Schicht 2* (Data Link Layer) hat die Aufgabe, den Symbolstrom der Schicht 1 als Datenblock zu interpretieren und ihn so fehlerarm wie möglich an die Vermittlungsschicht weiterzugeben. Um die Sicherung zu gewährleisten, werden fehlererkennende bzw. -korrigierende Codes eingesetzt. So wird den Daten der kommunizierenden Anwendungen, die als Blöcke (Rahmen) übertragen werden, sendeseitig systematische Redundanz hinzugefügt. Diese Rahmen werden dann sequentiell an die Partnerinstanz übertragen. Entsteht während der Übertragung ein Fehler, der auf der Empfängerseite erkannt wird, aber nicht korrigiert werden kann, so wird, je nach Anwendungsfall, die Übertragung des Blockes wiederholt oder die Daten werden verworfen. Eine Wiederholung wird durch einen Quittierungs-Mechanismus ausgelöst.

Da die Physikalische Schicht nur einen Strom von Symbolen empfängt und weitergibt, ist es Aufgabe der Sicherungsschicht, Rahmengrenzen einzufügen und zu erkennen. Dies kann dadurch erreicht werden, daß an Anfang und Ende eines Rahmens spezielle Bitmuster gesetzt werden. Ein bekanntes Protokoll, bei dem dieses Verfahren angewandt wird, ist das HDLC-Protokoll (High Level Data Link Control).

Ferner beinhaltet die Schicht 2 das Zugriffsprotokoll für das Medium und Funktionen für die Verbindungseinrichtung und -Auslösung.

Diese Schicht stellt neben Flußsteuerung, Fehlererkennung und -korrektur der nächsthöheren Schicht Dienste für Aufbau, Erhalt und Abbau von Schicht-2 Verbindungen zur Verfügung.

Die *Vermittlungsschicht — Schicht 3* (Network Layer) ist für die Einrichtung, den Betrieb und die Auslösung von Netzverbindungen zwischen offenen Systemen verantwortlich. Dazu gehören insbesondere die Wegewahl (Routing) und das Interpretieren von Adressen, d.h. die optimale Wegewahl beim Verbindungsaufbau bzw. während der Verbindung. Diese Route ist nicht nur von der Anzahl der Zwischenstationen, sondern auch von der Belastung und der Störanfälligkeit der einzelnen Zwischenstationen und Verbindungen abhängig.

Eine weitere Aufgabe dieser Schicht ist das Multiplexen von Daten auf den einzelnen Verbindungsabschnitten (Teilstrecken).

Die *Transportschicht — Schicht 4* (Transport Layer) ist für den Datentransport über die Ende-zu-Ende-Verbindung zuständig. Sie steuert den Beginn und das Ende einer Datenübermittlung, nimmt Blockaufteilung und Zusammenfassung vor und kontrolliert den Datenfluß.

Eine weitergreifende Fehlerbehandlung und Datensicherung sowie die Zuordnung zwischen symbolischer und physikalischer Geräteadresse und die Optimierung des Informations - Transportweges gehören ebenfalls zu den Aufgaben dieser Schicht.

Die *Sitzungsschicht — Schicht 5* (Session Layer) steuert den Kommunikationsablauf zwischen den beteiligten Endeinrichtungen und enthält Funktionen für den Austausch von Endgerätekennung, Festlegung der Form des Datenaustausches, Dialogverwaltung, Gebührenverrechnung oder Erkennung.

Die Aufgabe der *Darstellungsschicht — Schicht 6* (Presentation Layer) ist, durch schichtspezifische Dienste eine Transformation der Anwender-Daten in ein vereinbartes und allen Partnern bekanntes Standardformat für die Übertragung vorzunehmen.

Außerdem können in dieser Schicht durch Datenkompression die zu übertragende Anzahl der Bits reduziert und durch Verschlüsselung die Vertraulichkeit und Authentizität der Daten erhöht werden.

Die *Anwendungsschicht — Schicht 7* (Application Layer) bildet die Schnittstelle zum Teilnehmer bzw. seinen Anwendungsprogrammen. Auf dieser Schicht sind Dienstprogramme angesiedelt, die den Lauf eines Anwenderprogrammes (z.B. File Transfer) verwalten, verteilte Datenbanken bereitstellen,...

1.4 Zuteilung der Funkressourcen

Zur besseren Nutzung der Kapazität eines Übertragungsmediums wurden verschiedene Methoden entwickelt, durch die man mehrere Kommunikationsbeziehungen auf einen einzigen Kanal abbilden, d.h. multiplexen kann. Unter Multiplexverfahren versteht man somit Algorithmen, die eine Mehrfachausnutzung der Übertragungskapazität erlauben. Bei Funksystemen unterscheidet man dabei im wesentlichen folgende Verfahren: *Frequency Division Multiplex* (FDM, Frequenzmultiplex), *Time Division Multiplex* (TDM, Zeitmultiplex), *Code Division Multiplex* (CDM, Codemultiplex) und *Space Division Multiplex* (SDM, Raummultiplex).

1.4.1 Frequenzmultiplex

Beim Frequenzmultiplex-Verfahren wird das für das Funksystem zur Verfügung stehende gesamte Frequenzband in mehrere Teilbänder unterteilt, die gleichzeitig als Übertragungskanäle genutzt werden. Jedes dieser Frequenzbänder bildet einen Kanal, der jeweils einer Kommunikationsbeziehung zugewiesen wird.

Eine Einteilung des Frequenzspektrums in Frequenzbänder wird erreicht, indem man unterschiedliche Trägerfrequenzen mit den jeweils zu übertragenden Nachrichten moduliert. Nach der Übertragung über das gemeinsame Medium erfolgt die Trennung der Signale durch entsprechende Filterung im Empfänger. Da realen Filter über eine endliche Flankensteilheit verfügen, muß ein sogenanntes *Schutz-Band* zwischen den Frequenzbändern vorge-

sehen werden, um Übersprechen, sog. Nachbarkanal-Interferenz zu vermeiden. Somit ist die vollständige Nutzung des zur Verfügung stehenden Frequenzbandes nicht möglich.

Alle, e.g. öffentlichen Mobilfunksysteme verwenden das Frequenzmultiplex-Verfahren.

1.4.2 Zeitmultiplex, TDM

Ein nach dem TDM-Verfahren gebildeter Funkkanal wird in Zeitscheiben (Slots) gleicher Länge unterteilt. Jeder Station wird periodisch eine Zeitscheibe zugewiesen, in der sie ihre Daten übertragen kann.

Um den Nachteil zu vermeiden, der durch eine feste Zuweisung der Zeitschlitze an die einzelnen Stationen und die damit verbundene Belegung des Übertragungsmediums in Übertragungspausen entsteht, können die Zeitschlitze nach Bedarf den einzelnen Benutzern zentral oder dezentral zugewiesen werden.

Bei dem TDM-Verfahren ist am Eingang zum Übertragungsmedium ein Multiplexer und am Ausgang ein Demultiplexer erforderlich, die zueinander exakt synchronisiert sein müssen, um sicherzustellen, daß die übertragenen Nachrichten den richtigen Zeitkanälen zugeordnet werden. Ähnlich wie beim FDM-Verfahren muß auch in TDM-Systemen ein Schutzbereich eingeräumt werden. Die *Schutz-Zeit* zwischen den einzelnen Slots verhilft Synchronisationsfehler und Laufzeitunterschiede und damit Interferenzen der Stationen zu vermeiden. Diese Schutzzeit verhindert die Realisierung beliebig kleiner Zeitscheiben und reduziert somit die theoretisch mögliche Kapazitätsausnutzung.

Alle digital übertragenden Mobilfunksystemen verwenden neben dem FDM- auch das TDM-Verfahren.

1.4.3 Codemultiplex, CDM

Beim Codemultiplex-Verfahren werden in demselben Frequenzband durch Modulation der verschiedenen Sendesignale mit quasi orthogonalen Codes logische Code-Kanäle erzeugt. Insofern wird hier eine zweite Modulation vorgenommen, die das Spektrum des zu übertragenden Signals auf ein Mehrfaches seiner Originalbandbreite spreizt.

Jedem Benutzer des Kommunikationssystems wird jeweils eine geeignete Codiervorschrift zugewiesen, die so gewählt werden müssen, daß trotz zeitgleicher Übertragung die Interferenzen bei den Empfängern minimal sind. Deshalb sollten die Sequenzen möglichst orthogonal sein, was bei einer größeren Anzahl von Teilnehmern zu sehr langen Sequenzen führt. Verbreitet ist die Verwendung von *Pseudo Noise* (PN)-Sequenzen. Durch Bildung der Kreuzkorrelation der empfangenen Sequenz mit der verwendeten Code-Sequenz kann der Empfänger die Information des entsprechenden Senders dekodieren und so das Signal auf seine Originalbandbreite reduzieren.

Zur Realisierung der spektralen Spreizung des Signals werden in der Praxis hauptsächlich zwei Verfahren angewandt, *Direct Sequencing,* (DS) und *Frequency Hopping,* (FH).

1.4.3.1 Direct Sequencing

Das *Direct Sequencing* Verfahren ist die am weitesten verbreitete Spreiztechnik, bei der die zu übertragende binäre Information mit dem binären Ausgangssignal eines Pseudonoise-Generators verknüpft wird und anschließend zum Beispiel zur Phasenmodulation des Trägersignals verwendet wird. Das Verknüpfen der Daten mit der Pseudozufallsbitfolge transformiert das relativ schmalbandige Informationssignal auf eine relativ große Bandbreite (i.a. das 100 bis 1000 fache) und erzeugt so einen sogenannten Codekanal.

1.4.3.2 Frequency Hopping

Bei dem *Frequency Hopping* Verfahren wechseln Sender und Empfänger in einer schnellen Folge synchron die Übertragungsfrequenz. Der Frequenzsprung erfolgt entweder schnell (mehrere *hops* je Informationssymbol) oder langsam (ein *hop* gilt für mehrere Informationssymbole, evtl. das ganze Datenpaket).

In dem gesamten Frequenzbereich können mehrere Übertragungen gleichzeitig stattfinden, wobei Kollisionen auftreten können, falls sich zwei oder mehrere Sender zufällig gleichzeitig für die gleiche Frequenz entschieden haben. Solche Kollisionen, die beim Empfänger als Rauschen wahrgenommen werden, treten bei Anwendung von orthogonalen Codes selten auf.

Ein Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß Störungen im Übertragungskanal, z.B. durch zeitselektives Fading, in der Regel nur einen begrenzten Teil der Nachricht betreffen. Dieser fehlerhafte oder verlorene Nachrichtenteil kann durch geeignete Fehlerbehandlungsmechanismen auf der Empfängerseite wieder ausgeglichen werden, s. Kap. **??**. Dabei kann der Gewinn nur durch entsprechendes Verteilen der Information auf mehrere Datenpakete erzielt werden.

1.4.4 Raummultiplex, SDM

Dieses Verfahren wird durch die Tatsache ermöglicht, daß die Feldstärke des Funksignals mit dem Abstand vom Sender abnimmt und der gleiche Kanal örtlich wiederverwendet werden kann. Somit nutzt das Raummultiplex-Verfahren die Ausbreitungsdämpfung elektromagnetischer Wellen. Bei einem genügend großen Abstand vom Sender ist das Signal so schwach, daß die Störungen durch Interferenz bei Wiederverwendung dieser Frequenz durch einen anderen Sender toleriert werden können. Zellulare Systeme nutzen dieses Prinzip.

Auch Richtantennen nutzen den Effekt des Raummultiplex-Verfahrens, da räumlich getrennt Übertragungen stattfinden, sobald die Antennenkeulen nicht gegenseitig interferieren, s. Kap. **??**.

1.4.5 Zugriffs-Verfahren

Während die o.g. Multiplexverfahren (FDM, TDM, CDM, SDM) zur Bereitstellung von Übertragungskanälen im Funkmedium benutzt werden, drücken die Abkürzungen FDMA, TDMA, CDMA, SDMA aus, daß die Kanäle im Vielfachzugriff (MA=Multiple Access) durch i.d.R unabhängige (Mobil-)Stationen zugegriffen werden. Dabei unterscheidet man die Vielfalt von Zugriffsprotokollen, z.B. ALOHA als TDMA-Verfahren für TDM-Kanäle. Das Duplexverfahren beschreibt wie bidirektionale Kommunikationskanäle gestützt auf Multiplexverfahren realisiert werden. Üblich sind insbesondere FDD (Frequency Division Duplexing) und TDD (Time Division Duplexing). Beispielsweise läßt sich das GSM-System dann klassifizieren als FDM/FDMA/FDD/TDM/TDMA-System, während DECT ein FDM/FDMA/TDM/TDMA/TDD-System ist.

Modelle für den Funkkanal

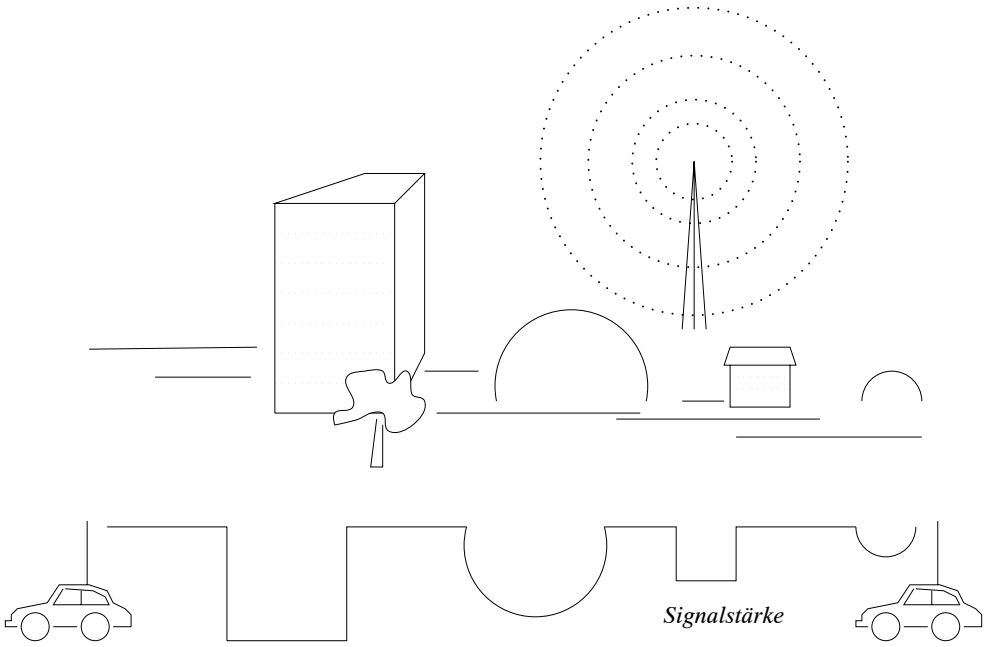

Abb. 2.1 Ein Mobilfunkszenario

Die starken zufälligen Schwankungen des Empfangssignals im Mobilfunk sind auf die Mehrwegeausbreitung in Verbindung mit der Bewegung der Sende bzw. Empfangsstation zurückzuführen[1].

Bei der Mehrwegeausbreitung gelangen die vom Sender abgestrahlten elektromagnetischen Wellen aufgrund von Hindernissen selten über die direkte Verbindungslinie zum Empfänger. Vielmehr erreichen eine Vielzahl von an Geländehindernissen, Gebäuden und evtl. Kraftfahrzeugen reflektierten und gestreuten Wellen über Umwege die Empfangsantenne. Das empfangene Signal ist daher eine konstruktive bzw. destruktive Überlagerung von auf unterschiedlichen Pfaden zum Empfänger gelangten Kopien des ursprünglich gesendeten Signals, die aufgrund der Längenunterschiede der Pfade um verschiedene Zeiten verzögert am Empfänger eintreffen und unterschiedlich stark gedämpft und phasenverschoben sind. Diese Interferenz kann demnach das Signal verstärken, verzerren oder ganz auslöschen, so daß der Empfänger dieses u.U. nicht mehr korrekt interpretieren kann. Die Einbrüche können bis zu 30dB betragen. Dabei stehen diese Interferenzen in einem höchst empfindlichen Abhängigkeitsverhältnis zu den spezifischen Eigenschaften der Übertragungsumgebung. Abb. ?? skizziert diese Tatsache.

[1]Gute Einführungen in die theoretischen Grundlagen für den Funkkanal finden sich bei [?, ?]. Mathematisch anspruchsvoll ist die Dissertation [?]. Die Artikel [?, ?] geben eine gute Übersicht.

Während Signal-Schwund (engl. Fading) allgemein die Gesamtheit aller ausbreitungsspezifischen Störungen bezeichnet, wird oben beschriebenes Phänomen *Mehrwege-Signal-Schwund* oder *Multipath-Fading* (engl. to fade: nachlassen, verblassen) genannt.

Wird eine stochastisch fluktuierende Übertragungsumgebung angenommen, lassen sich allgemeine statistische Zusammenhänge bezüglich der Leistungskenngrößen in parametrisierter Form angeben. Eine analytische Bestimmung dieser Parameter ist jedoch nur für sehr einfache Beugungsgeometrien möglich, während für realistischere Szenarien diese nur aus Meßreihen zu extrahieren sind. Vergleiche zwischen den gemessenen Daten und den zugehörigen Übertragungsszenarien (ländlich, urban, hügelig, gebirgig, wüstenänliche Vegetation) implizieren eine Kategorisierung der Szenarien in verschiedene Übertragungstypen, [?].

Außerdem findet man beim mobilen Empfang neben den durch Mehrwegeausbreitung bedingten Schwunderscheinungen häufig zeitlich langsamer variierende Fluktuationen durch veränderte Abschattungsbedingungen infolge von Gebäuden, Geländehindernissen, bzw. Häusern. Für dieses Phänomen finden neben der Bezeichnung *Longterm-Fading* auch die Begriffe *Abschattungs-Schwund* bzw. *Shadowing* Verwendung (bei ortsfestem Empfang ist die Abschattung nicht zeitabhängig, wenn nicht mobile Hindernisse die Abschattung verursachen).

Die Bewegung des Senders bzw. Empfängers führt außerdem zu Frequenzverschiebungen aufgrund des *Dopplereffektes*. Bei Mehrwegeausbreitung besitzen die verschiedenen auf die Antenne treffenden Wellen je nach Einfallsrichtung unterschiedliche Dopplerverschiebungen, so daß ein ganzes Spektrum von Dopplerfrequenzen auftritt. Die Form des Doppler-Spektrums ist abhängig von der Verteilung der Wellen bzgl. Einfallswinkel und Leistung.

Ein Modell muß hinsichtlich dessen, was es abbilden soll und bezüglich der zu untersuchenden Problemstellung adäquat sein. Infolgedessen existiert für den Mobilfunkkanal eine Vielzahl von Modellen. Einige sollen im folgenden vorgestellt und miteinander verglichen werden.

Man unterscheidet *generative Modelle*, die den Fehlerprozeß nachbilden, und *deskriptive Modelle*, die primär die zeitveränderlichen Pegel eines über diesen Kanal gesendeten Signals erfassen. Abb. ?? gibt eine Übersicht über diese Modelltypen und ordnet sie den jeweiligen Kapiteln zu.

2.1 Einfache Zustandsmodelle für den Mobilfunkkanal

In diesem Kapitel werden Modelle für den Mobilfunkkanal beschrieben, die auf Zustandsmodellen beruhen, wobei die Abbildungsfunktion der Zustände auf die Symbolfehlerrate eine besonders einfache Form aufweist. Sie kann nur die Werte $h \in (0, 1]$ oder 0 annehmen. Der Zustandsraum läßt sich formal mit

$$\mathbb{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

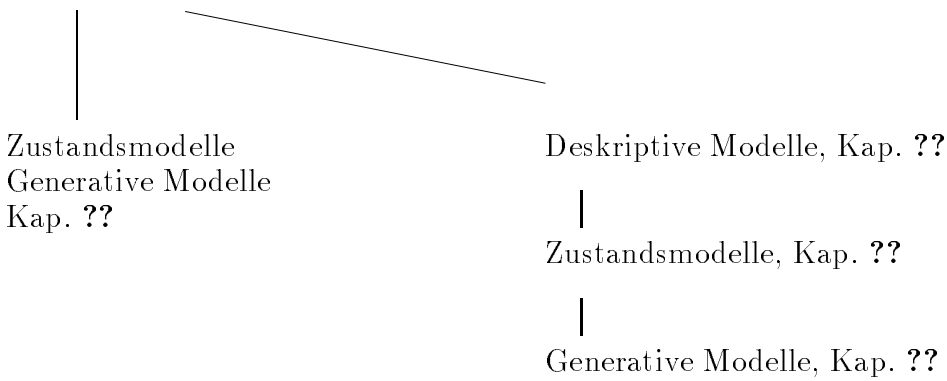

Abb. 2.2 Übersicht der Modelltypen für den Funkkanal

beschreiben. Die Abbildungsfunktion ϕ impliziert eine Unterteilung der Zustandsmenge in Zustände, die möglicherweise fehlerbehaftet sind, also auf h abgebildet werden, und Zustände, die keine Symbolfehler mit sich bringen und infolgedessen auf 0 abgebildet werden.

Zwischen den Zuständen gibt es Zustandsübergänge, die je nach Modelltyp unterschiedlich sind. Ihnen werden meist Wahrscheinlichkeitsmaße zugeordnet.

Zunächst soll zur Klassifikation der folgenden Modelle die Definition der Markov-Kette und die des Fehlerprozesses erfolgen.

Definition 1 *(Markov-Kette (MK))*

Der zeitdiskrete stochastische Prozeß $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ wird durch eine zeitdiskrete Markov-Kette mit dem Zustandsraum $\mathbb{Z}$ beschrieben, falls gilt

$$Pr\{X_n = i_n \,|\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i_{n-1}\} = Pr\{X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } i_0, i_1, \ldots, i_{n-2}, i_{n-1}, i_n \in \mathbb{Z},$$

wobei Pr ein positives Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet. □

Definition 2 *(Fehlerprozeß)*

Ist $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeitdiskreter stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$ und die Abbildungsfunktion ϕ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\phi : \mathbb{Z} \to [0, 1]$, dann ist der binäre stochastische Prozeß $\{e_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ auf $\{0, 1\}$ mit

$$Pr\{e_n = 1\} = \phi(X_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2}$$

der dem *Zustandsprozeß* $\{X_n\}$ *zugeordnete Fehlerprozeß* . □

Die Abbildungsfunktion $\phi(\cdot)$ wird als die dem entsprechenden Zustand zugeordnete Symbolfehlerwahrscheinlichkeit interpretiert. Bei den zunächst behandelten einfachen Zustandsmodellen gilt

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, h\}, \qquad h \in (0, 1]. \tag{2.3}$$

Nun sollen einige Einschränkungen erfolgen, um das Modell einfacher zu parametrisieren.

2.1.1 Gilbert-Modell

Erstmalig beschrieb GILBERT in [?] das Verhalten gedächtnisbehafteter Kanäle mit Markov-Ketten.

Das Gilbert-Modell ist eine Markov-Kette mit zwei Zuständen, denen folgende Bedeutung zukommt: In dem Zustand, der mit G für "Good" bezeichnet ist, werden keine Fehler generiert. Im Zustand B für "Bad" ist die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit h. Mit dieser Wahrscheinlichkeit ist das in diesem Zustand erzeugte Symbol fehlerhaft, mit der Wahrscheinlichkeit $1-h$ wird ein fehlerfreies Symbol erzeugt. Nachdem jeweils ein Symbol generiert ist, erfolgt der Zustandsübergang gemäß einer Übergangsmatrix $\mathbf{q} = (q_{i,j\in\{1,2\}})$. Die

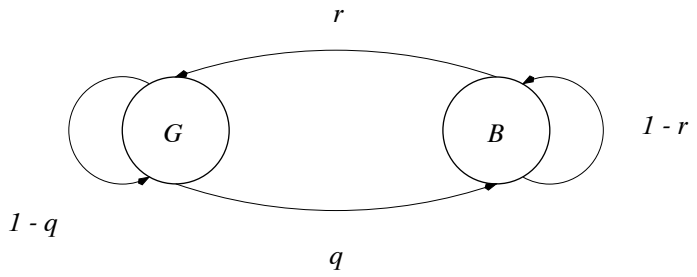

Abb. 2.3 Modell von Gilbert

Zustandsübergänge $z_i \to z_j$ werden also durch Wahrscheinlichkeitsmaße $q_{i,j}$ mit $i,j \in \{1,2\}$ beschrieben, die man zu einer Matrix $\mathbf{q}$ zusammenfaßt. Der Zustandsraum ist $\mathbb{Z} = \{G, B\}$. Es gilt dann für den zeitdiskreteten Prozeß $\{U_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, der die Abfolge der Zustände beschreibt,

$$Pr\{U_n = z_j \,|U_{n-1} = z_i\} \;=\; q_{i,j} \qquad i,j = 1,2,\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Offensichtlich stellt $\{U_n\}$ einen homogenen zeitdiskreten Markov-Prozeß dar, der auch als Markov-Kette bezeichnet wird. Die Übergangswahrscheinlichkeiten in jeweils den gleichen Zustand

$$Pr\{U_n = G \,|\, U_{n-1} = G\} = 1-q, \qquad Pr\{U_n = B \,|\, U_{n-1} = B\} = 1-r \tag{2.5}$$

ermöglichen die Folgen fehlerfreier bzw. fehlerbehafteter Symbole (Fehlerbüschel) nachzubilden. Weiterhin gibt es die Übergangswahrscheinlichkeiten in den jeweils anderen Zustand

$$Pr\{U_n = G \,|\, U_{n-1} = B\} = r, \qquad Pr\{U_n = B \,|\, U_{n-1} = G\} = q. \tag{2.6}$$

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten hat dann folgendes Aussehen:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ r & 1-r \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Aus dieser Matrix berechnen sich die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten

$$Pr\{U_n = G\} \;=\; \frac{r}{(q+r)}, \qquad Pr\{U_n = B\} \;=\; \frac{q}{(q+r)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.8}$$

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers mit

$$Pr\{e_n = 1\} \;=\; h \;\; Pr\{U_n = B\} \;=\; h \;\frac{q}{(q+r)}. \tag{2.9}$$

Die Parametrisierung beruht, wie später auch beim Fritchmann-Modell ausführlich beschrieben, auf den Eigenschaften des gemessenen Kanals.

Da im Zustand "Bad" sowohl Fehler als auch Nicht-Fehler generiert werden, läßt sich keine eindeutige Zuordnung der Zustände auf die Symbole der Fehlerfolge angeben. Durch Einführung eines weiteren Zustands kann dieser Nachteil jedoch beseitigt werden, so daß sich das modifizierte Gilbert-Modell wie in Abb. **??** gezeigt, ergibt. Der Zustand B wird abgebildet mit Wahrscheinlichkeit h auf B_1, sonst auf B_0.

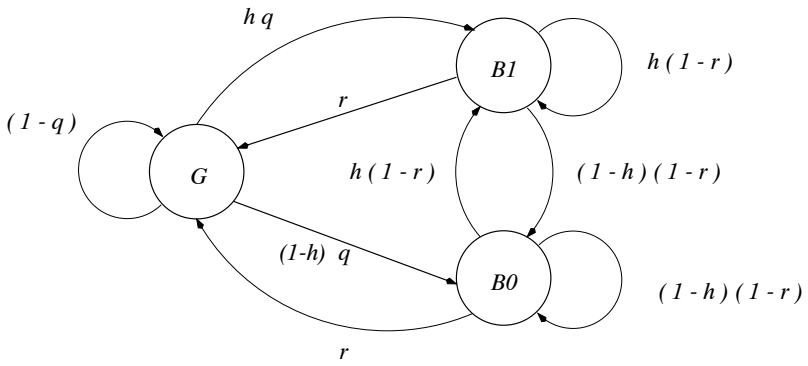

Abb. 2.4 Modifiziertes Modell von Gilbert

Dann lautet die Abbildungsfunktion

$$\phi(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z_i = G \\ 0 & \text{falls } z_i = B0 \\ 1 & \text{falls } z_i = B1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Die Übergangsmatrix hat nun folgendes Aussehen:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1-q & (1-h)q & hq \\ r & (1-h)(1-r) & h(1-r) \\ r & (1-h)(1-r) & h(1-r) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

2.1.2 Fritchmann Modell

Das Modell von FRITCHMANN, vgl. [**?**], verwendet eine Markov-Kette mit $m > 2$ Zuständen. Der Zustandsraum ist dabei in zwei Gruppen A und B eingeteilt. Gruppe A enthält die Nicht-Fehler-Zustände, Gruppe B entsprechend die Fehler-Zustände, vgl. Abb. **??**. Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit wird mit $h = 1$ maximal gewählt.

Abb. 2.5 Zustandsraum des Fritchmann-Modell

Zunächst werden für die Zustandsübergänge keine Einschränkungen vorgenommen, d.h. es ist jeder Übergang erlaubt. Die Abbildungsfunktion lautet

$$\phi(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z_i \in \text{A} \\ 1 & \text{falls } z_i \in \text{B}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Zur Nachbildung des Fehlerprozesses $\{e_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ wird die Parametrisierung der Übergangsmatrix des Fritchmann-Modells aus der gemessenen Fehlerabstandsverteilung eines realen Kanals vorgenommen.

Die Fehlerabstands-Maß-Verteilung (engl. error-gap probability mass function) $P(0^{k-1}\,1|1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der Fehlerfolge $\{e_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ das k-te Symbol fehlerhaft ist, nachdem vorher $k-1$ korrekte Symbole aufgetreten sind und vor dieser Sequenz ebenfalls eine Eins, d.h. ein Fehler auftrat, [**?**]. Dann gilt

$$P(0^{k-1}\,1\,|\,1) \;=\; Pr\{e_{n+1} = 0, e_{n+2} = 0, \ldots, e_{n+k-1} = 0, e_{n+k} = 1\,|\,e_n = 1\}. \tag{2.13}$$

Dabei wurde Stationarität für die Fehlerfolge angenommen. Die zugehörige komplementäre Verteilungsfunktion ist

$$P(0^k\,|\,1) \;=\; \sum_{l=k}^{\infty} P(0^l\,1\,|\,1), \tag{2.14}$$

sie wird auch als Fehlerabstandsverteilung, *error-gap function* bezeichnet.

Analog läßt sich die Funktion $P(1^k|0)$ definieren, die Fehlerlauflängenverteilung genannt wird.

Die algebraische Herleitung ergibt für das Fritchmann-Modell eine gewichtete Summe von Exponentialfunktionen

$$P(0^k\,|\,1) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} f(\nu)\,\lambda_\nu^k \quad \text{für } k \;\geq\; 1 \tag{2.15}$$

mit den Gewichten $f(\nu)$, [**?**].

Um die Anzahl der benötigten Zustände zu ermitteln, betrachtet man die Fehlerlauflängenverteilung $P(1^k|0)$ und die Fehlerabstandsverteilung $P(0^k|1)$. Aus der Anzahl der Geraden, mit denen diese Verteilungen angenähert werden können, lassen sich Rückschlüsse auf die Anzahl der jeweiligen Zustände ziehen, [**?**].

Zur Vereinfachung werden nun Einschränkungen vorgenommen, so daß Zustandsübergänge nur in den gleichen Zustand und zu Zuständen der jeweils anderen Gruppe erlaubt sind.

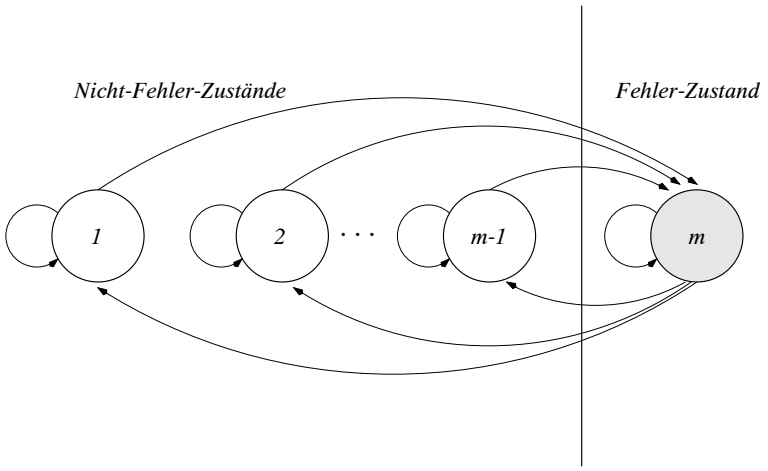

Abb. 2.6 Vereinfachtes Fritchmann-Modell mit einem Fehlerzustand

Das führt zur in Abb. **??** gezeigten Darstellung des vereinfachten Fritchmann-Modells [**?**]. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten hat dann folgendes Aussehen:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \dots & \dots & p_{1m} \\ 0 & p_{22} & 0 & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{m-1m-1} & p_{m-1m} \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm-1} & p_{mm} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Mit der Vereinfachung ergibt sich für die Fehlerabstandsverteilung

$$P(0^k|1) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{p_{m\nu}}{p_{\nu\nu}} \, (p_{\nu\nu})^k \quad \text{für } k \geq 1. \tag{2.17}$$

Mit den Modellparametern $\alpha_\nu = \frac{p_{n\nu}}{p_{\nu\nu}}$ und $\beta_\nu = p_{\nu\nu}$ folgt

$$P(0^k|1) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \alpha_\nu \, \beta_\nu^k \quad \text{für } k \geq 1. \tag{2.18}$$

Die Modellparameter (α_ν, β_ν) müssen nun so bestimmt werden, daß die Verteilung $P(0^k|1)$ der entsprechenden Verteilung des parametrisierenden Prozesses optimal angepaßt wird.

In Abbildung **??** ist eine Originalverteilung der Fehlerabstände, die durch Messungen an realen Empfängern und den zugehörigen Decodiereinrichtungen vorgenommen wurde, dargestellt. Ebenso ist beispielhaft gezeigt, wie die sog. Startparameter des Modells (α_ν, β_ν) die Fehlerabstandsverteilung annähern.

In diesem Beispiel wurde die Verteilung mit vier Exponentialfunktionen, die bei logarithmischer Skalierung in Geraden übergehen, angenähert. Es ergibt sich für die Übergangsmatrix

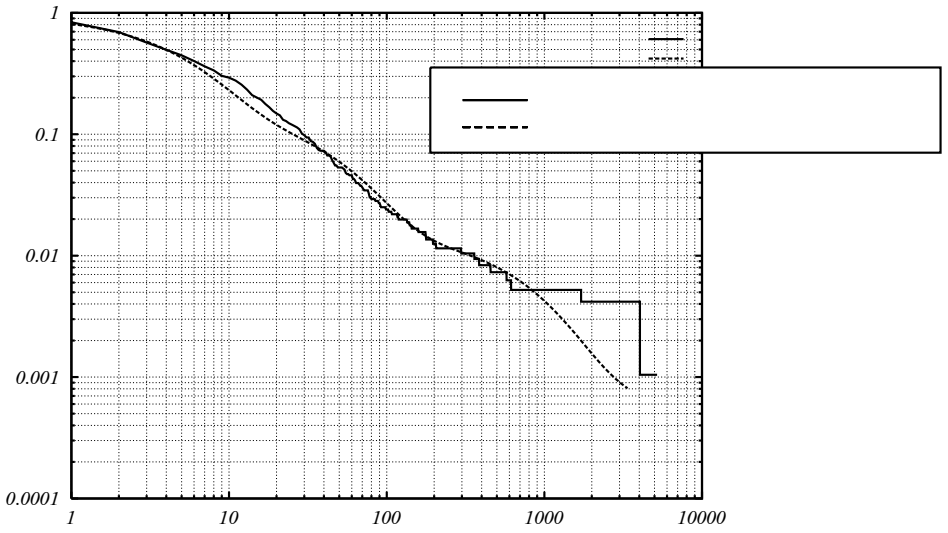

Abb. 2.7 Fehlerabstandsverteilung

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 1-\beta_1 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 1-\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 1-\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & 1-\beta_4 \\ \alpha_1\,\beta_1 & \alpha_2\,\beta_2 & \alpha_3\,\beta_3 & \alpha_4\,\beta_4 & 1-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\,\beta_i \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

mit $\alpha_1 = 0.001, \beta_1 = 0.9999, \alpha_2 = 0.015, \beta_2 = 0.9985, \alpha_3 = 0.15, \beta_3 = 0.976, \alpha_4 = 0.8, \beta_4 = 0.81$. Diese Schätz- bzw. Startwerte müssen dann mit einer geeigneten Methode optimiert werden. Das notwendige Kriterium liefert eine Zielfunktion, die die quadratischen Abstände der gemessenen bzw. vorliegenden Fehlerabstandsverteilungen in logarithmischer Darstellung erfaßt.

In [?] wird die Gradientenmethode vorgeschlagen, um die Zielfunktion zu minimieren. TURIN entwickelt in [?] eine Modifikation des Baum-Welsch-Algorithmus, die sich als numerisch effizienter erweist.

Ausführliche Beschreibungen finden sich in [?].

2.1.3 Einfache Zustandsmodelle für den Mobilfunkkanal als diskrete Markovsche Ankunftsprozesse

In dem Beitrag von BLONDIA [?] wird der DMAP (Discrete Markov Arrival Process) als zeitdiskretes Analogon des MAP (Markov Arrival Process), der von LUCATONI in [?] vorgestellt wurde, entworfen. Der DMAP wird in der Verkehrstheorie als Prozeß für korrelierte Ankünfte verwendet, [?]. Der Prozeß ist gekennzeichnet durch Zustände und Zustandsübergänge. Dabei sind für den DMAP zwei Typen von Übergängen möglich. Bei den Übergängen erster Art findet eine Erneuerung statt, bei denen zweiter Art dagegen keine. Die jeweiligen Wahr-

scheinlichkeitsmaße für die Zustandsübergänge werden, entsprechend des Übergangstyps, in Matrizen abgelegt. Insofern ist der DMAP durch zwei Matrizen vollständig charakterisiert. Es soll noch Erwähnung finden, daß in der Verkehrstheorie Gruppen von Ankünften mit dem DBMAP (Discrete Batch Markov Arrival Process) modelliert werden, wobei die verschiedenen Ankunftsgruppen je nach Größe den Typen von Ankünften zugeordnet sind, [?].

Werden die fehlerhaften Symbole des Gilbert- bzw. Fritchmann-Modelles als Erneuerungen interpretiert und die korrekten Symbole entsprechend den Zustandsübergängen zugeordnet, bei denen keine Erneuerungen auftreten, so können diese einfachen Zustandsmodelle als spezielle DMAPs interpretiert werden und die Eigenschaften, die für den DMAP hergeleitet wurden, können übernommen werden. So werden die Zustandsübergänge bei dem Modell nach Abb. **??** aus der Gruppe der 'fehlerhaften Zustände' (Gruppe B) heraus durch die Fehlermatrix $\mathbf{d}$ zusammengefaßt, während die Übergänge aus der Gruppe der 'nicht-Fehler-Zustände' heraus (Gruppe A) mit einer zweiten Matrix $\mathbf{c}$ beschrieben werden.

Zur Verdeutlichung werden die Matrizen formal dargestellt

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1-q & (1-h)q & 0 \\ r & (1-h)(1-r) & 0 \\ r & (1-h)(1-r) & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & hq \\ 0 & 0 & hr \\ 0 & 0 & h(1-r) \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Im Vorgriff auf spätere Kapitel soll jedoch angemerkt werden, daß das wichtige Beschreibungsmaß die *Wahrscheinlichkeit von k fehlerhaften Symbolen in n, mit* $n > k$ hier nicht sinnvoll approximiert werden kann.

Darüber hinaus können jedoch alle Ergebnisse von Kap. **??** vollständig übernommen werden.

2.2 Motivation für weiterführende Untersuchungen

Neben den gerade angedeuteten Problemen, die im Zusammenhang mit der diskreten Erneuerungtheorie stehen, gibt es noch andere Motive, die zu weiterführenden Untersuchungen leiten. Bei stochastischen Simulationen von Szenarien mit mehreren hundert Stationen, die über das Funkmedium miteinander kommunizieren, kommt es zu ständigen Parameterwechsel in bezug auf den Funkkanal. Änderungen der Geschwindigkeiten der Stationen oder der Abstände der Stationen untereinander bewirken unmittelbare Parameteränderungen des Funkkanals. Deshalb müssen Modelle für den Fehlerprozeß möglichst einfach zu parametrisieren sein. Insbesondere Mittelwertänderungen des Signalpegels aufgrund einer Änderung der Abstände der kommunizierenden Stationen sollten nicht eine völlige Neuparametrisierung des Modelles für den Fehlerprozeß erforderlich machen. In den folgenden Kapiteln wird unter diesem Gesichtspunkt ein neuer Modellierungsansatz vorgenommen. In einem späteren Kapitel (Kap. **??**) werden die entwickelten Modelle in Simulationsszenarien mit mehreren hundert Stationen eingesetzt.

2.3 Deskriptive Modelle für den Funkkanal, Systemtheoretische Modellierung

Nun soll der Mobilfunkkanal selbst beschrieben werden. Es steht also nicht der Fehlerprozeß im Vordergrund, sondern dieser ergibt sich als vom Mobilfunkkanal abgeleiteter Prozeß in einem zweiten Modellierungsschritt.

Zunächst soll der Mobilfunkkanal als zeitvariantes System aufgefaßt werden. Die Zeitvariation wird später durch die Variable t formuliert. Dann wird der Kanal als stochastischer Prozeß über der Zeit t aufgefaßt.

2.3.1 Systemtheoretische Modellierung

In [?] leiten GREENWOOD und HANZO die Charakteristik des Mobilfunkkanals her[2]. Betrachtet wird ein Signal $x(t)$ der Bandbreite B_x und der Mittenfrequenz f_m, das von einer idealen isotropen Antenne über den Mobilfunkkanal gesendet wird. Ist B_x relativ zur Mittenfrequenz f_m schmal, so kann man die charakteristischen Werte eines jeden Pfades als unabhängig von der Frequenz ansehen, selbst wenn der Kanal frequenzdispersiv sein sollte. Ist B_x jedoch gegenüber f_m breit, so können die Ausbreitungsphänomene, wie z.B. Reflexion und Beugung, nicht mehr länger als frequenzunabhängig über die gesamte Bandbreite angesehen werden. Diese können zu starken Verzerrungen der Signale führen.

2.3.1.1 Zusammenstellung der acht Systemfunktionen nach BELLO

Um lineare zeitvariante Kanäle beschreiben zu können, führte BELLO in [?] acht Systemfunktionen ein. Man unterscheidet je vier *Systemfunktionen* und vier *Systemkorrelationsfunktionen*. Jede Funktion beinhaltet eine vollständige Beschreibung des Kanals. Zur Orientierung sind in der folgenden Tabelle die Variablen mit den entsprechenden Bedeutungen aufgelistet.

Variable	Notation	Einheit
Zeit	t	Sekunden
Frequenz	f	Hertz
Verzögerung (delay)	ξ	Sekunden
Doppler-Verschiebung (Doppler Shift)	ν	Hertz

Sei $x(t)$ das gesendete Signal bzw. die gesendete Welle. Als Folge der Mehrwegeausbreitung erreichen verschiedene zeitverschobene Elementarwellen $x(t-\xi)$ mit einem entsprechenden zeitvarianten Dämpfungsfaktor $h(t,\xi)\,d\xi$ den Empfänger. Das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ ist die Superposition der Beiträge aller dieser Elementarwellen. $y(t)$ kann auch als

[2] Analoge Ableitungen finden sich in [?] pp. 30.

Transversalfilter gedacht werden. Es gilt für die Eingangszeitdispersionsfunktion

$$y(t) = \int_{IR} h(t,\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi. \tag{2.21}$$

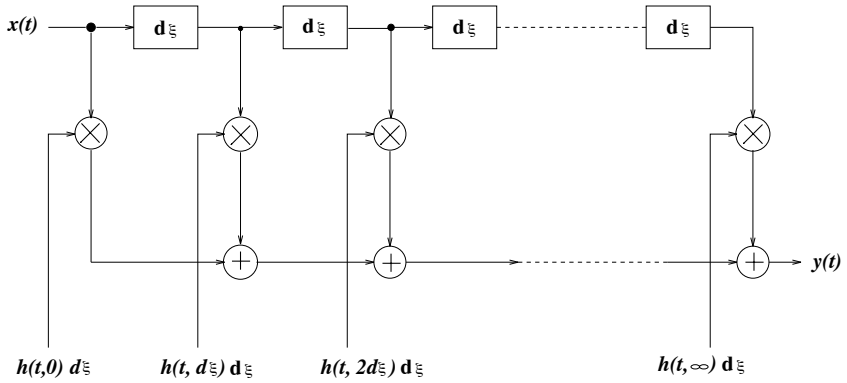

Abb. 2.8 Eingangszeitdispersionsfunktion

Abb. **??** gibt die Struktur von Gl. **??** wieder. Die zeitvariante Übertragungsfunktion $T(f,t)$ ist die partielle Fouriertransformation der Eingangszeitdispersionsfunktion bzgl. der Variablen ξ. Man kann $T(f,t)$ als komplexe Einhüllende des empfangenen Signals auf ein zissoides Eingangssignal auffassen, [**?**], p. 13.

Def:

$$T(f,t) := \int_{IR} h(t,\xi)\, \exp\{-\jmath\, 2\pi f\xi\}\, d\xi \tag{2.22}$$

oder

$$y(t) = \int\!\!\int_{IR^2} T(f,t)\, x(t-\xi)\, \exp\{\jmath\, 2\pi ft\}\, d\xi\, dt \tag{2.23}$$

Die Verzögerungsdopplerdispersionsfunktion $U(\xi,\nu)$ ist die partielle Fouriertransformation von $h(t,\xi)$ bzgl. der Variablen t. $y(t)$ ist die gewichtete Summe von Elementarwellen $x(t-\xi)e^{\jmath 2\pi\nu t}$, die um ξ zeitverzögert und um ν frequenzverschoben sind. Die Wellen mit der Zeitverzögerung im Intervall $[\xi, \xi+d\xi]$ und der Frequenzverschiebung im Intervall $[\nu, \nu+d\nu]$ sind mit der Differentialverstärkung $U(\xi,\nu)d\xi d\nu$ gewichtet, [**?**], p. 14.

Def.:

$$U(\xi,\nu) := \int_{IR} h(t,\xi)\, \exp\{-\jmath\, 2\pi\nu t\}\, dt \tag{2.24}$$

oder

$$y(t) = \int\!\!\int_{IR^2} U(\xi,\nu)\, x(t-\xi)\, \exp\{\jmath\, 2\pi\nu t\}\, d\xi\, d\nu \tag{2.25}$$

Man interpretiert die Ausgangsfrequenzdispersionsfunktion $H(f,\nu)$ als das Spektrum des Ausgangssignals, welches von einer Zissoiden $x(t) = e^{\jmath 2\pi f_1 t}$ der Frequenz f_1 verursacht wird.

Formuliert als Funktion der Frequenzverschiebung $f - f_1$ relativ zu f_1 erhält man

$$Y(f) \;=\; \int\limits_{IR} H(f-\nu,\nu)\,\delta(f-f_1-\nu)\,d\nu \;=\; H(f_1, f-f_1). \tag{2.26}$$

Hier ist die Doppler-Verschiebung $d\nu$ mit dem Ausgang des Kanals verbunden und wird deshalb mit der Bezeichnung *Output* in Verbindung gebracht. Beide Modelle sind äquivalent und erlauben eine Rechnersimulation im Frequenz- oder Zeitbereich.

Def.:

$$H(f,\nu) \;:=\; \int\limits_{IR} T(f,t)\,\exp\{-\jmath\,2\pi\nu t\}\,dt \tag{2.27}$$

oder

$$Y(f) \;=\; \int\limits_{IR^2}\int T(w,t)\,\exp\{\jmath 2\pi t(w-f)\}\,X(w)\,dw\,dt \tag{2.28}$$

Durch Substitution erhält man auch

$$Y(f) \;=\; \int\limits_{IR} X(f-\nu)\,H(f-\nu,\nu)\,d\nu. \tag{2.29}$$

Alle vier Systemfunktionen sind untereinander durch Fouriertransformationen miteinander verbunden. Bild ?? gibt einen Überblick über diese Zusammenhänge.

Dabei bedeuteten F : Fouriertransformation und F^{-1} : Inverse Fouriertransformation.

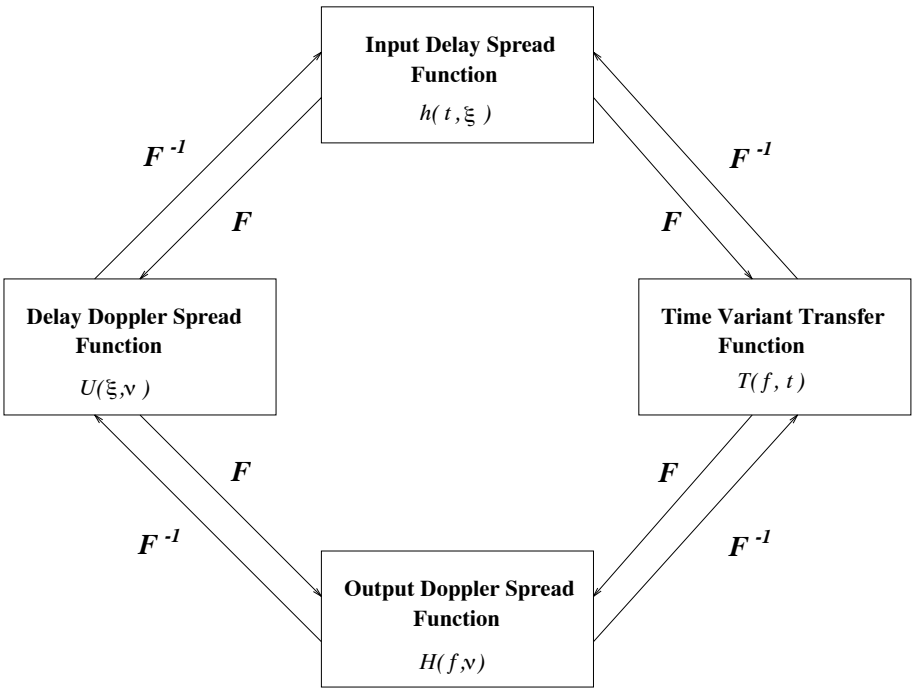

Abb. 2.9 Fourierzusammenhang der vier Systemfunktionen, (Quelle [?])

Zunächst folgen einige Definitionen, die für das nächste Kapitel benötigt werden.

2.3.2 Definitionen zur Stochastik

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ und eine nicht leere Indexmenge $\mathbb{T}$.

Definition 3 *(stochastischer Prozeß - (SP))*

Ein stochastischer Prozeß $X = \{X_t\,,\, t \in \mathbb{T}\}$ ist eine Menge (Familie) von indizierten Zufallsvariablen $\{X_t\}$ mit $t \in \mathbb{T}$ und mit gemeinsamen Wertebereich $\mathbb{E}$. $\mathbb{T}$ heißt Parameterraum und $\mathbb{E}$ heißt Zustandsraum. □

Ist $\mathbb{T}$ abzählbar, spricht man von einem stochastischen Prozeß mit *diskretem Parameter*, ist $\mathbb{T}$ überabzählbar, liegt ein stochastischer Prozeß mit *kontinuierlichem* Parameter vor. Mit $\mathbb{T}$ wird oft die positive Zeitachse assoziiert.

Hier werden fast ausschließlich zeitdiskrete stochastische Prozesse betrachtet, so daß gilt $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$.

Definition 4 *(Verteilungsfunktionen (VFn) eines SP)*

Die durch

$$F_{X_{t_1},X_{t_2}\ldots X_{t_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Pr\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots X_{t_n} \leq x_n\} \tag{2.30}$$

$$\text{für alle } n = 1, 2, \ldots, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$$

bestimmte Menge von Verteilungsfunktionen heißt die vom SP $\{X_t\,,\, t \in \mathbb{T}\}$ *erzeugte Familie der endlich dimensionalen Verteilungsfunktionen.* □

Definition 5 *(Verteilungsdichtefunktionen (VDFn) eines SP)*

Die Verteilungsdichtefunktionen (VDFn) des SP $\{X_t\,,\, t \in \mathbb{T}\}$ bzw. die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X_t ist

$$f_{X_{t_1},X_{t_2}\ldots X_{t_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{d^n}{dx_1 \ldots x_n} F_{X_{t_1},X_{t_2}\ldots X_{t_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.31}$$

falls $F_{X_{t_1},X_{t_2}\ldots X_{t_n}}$ partiell differenzierbar nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist. □

$\mathbf{E}\,[\,X_t\,]$ heißt Erwartungswert, $C_{xx}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\,\big[\,(X_{t_1} - \mathbf{E}\,[\,X_{t_1}\,]\,), (X^*_{t_2} - \mathbf{E}\,\big[\,X^*_{t_2}\,\big]\,)\big]$ wird Autokovarianz genannt, dabei bedeutet $(\cdot)^*$ der konjugiert komplexe Wert.

Ein SP $\{X_t\,,\, t \in \mathbb{T}\}$ heißt *streng stationär* (engl. strict sense stationary, SSS), falls für alle τ die Zufallsvariablen X_t und $X_{t+\tau}$ die gleiche Verteilung besitzen.

Ein SP $\{X_t\,,\, t \in \mathbb{T}\}$ heißt *schwach stationär* (engl. wide sense stationary, WSS), falls gilt $\mathbf{E}\,[\,X_t\,] = constant$ und $C_{xx}(t_1, t_2) = C_{xx}(|t_1 - t_2|)$.

2.3.3 Stochastische Modellierung, Beschreibung des Funkkanals durch Systemkorrelations-Funktionen

Weisen zeitvariante lineare Systeme statistische Variationen auf, dann sind die Systemfunktionen von BELLO Realisierungen eines zweidimensionalen Zufallsprozesses. Eine allg. bekannte Weise zur Charakterisierung dieser linearen Systeme erreicht man durch die Bildung von *Mittelwert* und *Autokovarianzfunktion* der verschiedenen Systemfunktionen. Diese sind experimentell leicht erfaßbar und liefern wertvolle Informationen über die physikalischen Eigenschaften des linearen Systems. Diese Größen führen zu einer vollständigen Charakterisierung des linearen Systems, falls die Systemfunktionen stochastische Gauß'sche Prozesse sind. Aus Einfachheitsgründen werden im weiteren nur statistische lineare Systeme betrachtet, die mittelwertfreie Systemfunktionen besitzen. Dies führt nicht zu einer Beschränkung der Allgemeinheit, da eine Systemfunktion in eine Summe eines deterministischen und eines mittelwertfreien, stochastischen Anteils zerlegt werden kann, s. [?].

Statistisch mittelwertfreie zeitvariante lineare Systeme werden durch ihre vier sogenannten *Systemkorrelationsfunktionen* auf folgende Art beschrieben:

$$\begin{array}{llll} R_h(t,s;\xi,\eta) := & \mathbf{E}\,[\,h^*(t,\xi)\,h(s,\eta\,] & R_T(f,l;t,s) := & \mathbf{E}\,[\,T^*(f,t)\,T(l,s)\,] \\ R_U(\xi,\eta;\nu,\mu) := & \mathbf{E}\,[\,U^*(\xi,\nu)\,U(\eta,\mu)\,] & R_H(f,l;\nu,\mu) := & \mathbf{E}\,[\,H^*(f,\nu)\,H(l,\mu)\,]\,. \end{array} \tag{2.32}$$

Es sei noch erwähnt, daß t,s,ξ,η Variablen der Zeit und f,l,ν,μ Variablen der Frequenz sind. Diese vier Systemkorrelationsfunktionen (SKFn) stehen untereinander analog der jeweils zugehörigen Systemfunktionen durch Fouriertransformationen in Beziehung.

Die vier Systemkorrelationsfunktionen sind in ihrer Form noch sehr unhandlich. Wenn man sich auf eine spezielle Klasse von statistisch linearen Systemen beschränkt, werden die SKFn leichter realisierbar.

2.3.4 WSSUS-Systeme

Diese Systeme besitzen die Eigenschaften der WSS- (*im weiten Sinn stationären Systeme*, Wide Sense Stationary systems) und der US-Systeme (*unkorreliert streuende Systeme*, Uncorrelated Scattered systems) und zeichnen sich durch besonders einfache SKFn aus. In realen Übertragungskanälen sind diese Voraussetzungen meist gegeben. In der Literatur existieren nur wenige Modelle, die nicht auf diese Annahme zurückgreifen, [?].

In einem WSSUS-System gilt für die Eingangszeitdispersionsfunktion:

$$R_h(t,t+\tau;\xi,\eta) = Q(\tau,\xi)\delta(\eta-\xi) \tag{2.33}$$

mit

$$Q(\tau,\xi) := \mathbf{E}\,[\,h^*(t,\xi)h(t+\tau,\xi)\,]\,. \tag{2.34}$$

$Q(\tau,\xi)$ heißt dann *Verzögerungs-Kreuzleistungsdichte* (engl. Delay Cross Power Spectral Density).

Für eine feste Verzögerung ξ entspricht sie der Autokovarianzfunktion des zeitlich stationären Zufallsprozesses $h(t,\xi)$. Sie beschreibt die zeitliche Variation der Eingangszeitdispersionsfunktion in Abhängigkeit der Verzögerung ξ. In Anlehnung an das Modell eines Transversalfilters heißt dies, daß die Koeffizienten $h(t,\xi)d\xi$ in der Variablen t stationäre Zufallsprozesse für eine feste Zeit ξ sind, während Koeffizienten verschiedener Verzögerungen unkorreliert sind. Im Funk heißt dies insbesondere, daß die den Empfänger erreichenden Elementarwellen stationäre zeitliche Schwankungen aufweisen, während zwei Wellen mit verschiedener Verzögerung unkorreliert sind.

Für die übrigen drei SKFn gilt dann

$$R_T(f, f+\zeta; t, t+\tau) \;=\; R(\zeta,\tau) \tag{2.35}$$

$$R_U(\xi,\eta;\nu,\mu) \;=\; S(\xi,\nu)\,\delta(\eta-\xi)\,\delta(\mu-\nu) \tag{2.36}$$

$$R_H(f, f+\zeta;\nu,\mu) \;=\; P(\zeta,\nu)\,\delta(\mu-\nu). \tag{2.37}$$

Die Funktionen $R(\zeta,\tau), S(\xi,\nu), P(\zeta,\nu)$ stehen durch die ein- oder zweidimensionale Fouriertransformation mit $Q(\tau,\xi)$ im Zusammenhang.

Die sogenannte *Zeit-Frequenz-Korrelationsfunktion* ist die AKF der zeitvarianten Übertragungsfunktion $T(f,t)$. Sie ist auf folgende Weise definiert:

$$R(\zeta,\tau) \;=\; \mathbf{E}\,[\,T^*(f,t)T(f+\zeta,t+\tau)\,] \tag{2.38}$$

oder formuliert mit $Q(\tau,\xi)$

$$R(\zeta,\tau) \;=\; \int\limits_{IR} Q(\tau,\xi)e^{-\jmath 2\,\pi\zeta\xi}d\xi. \tag{2.39}$$

Die *Streufunktion* ist definiert als

$$S(\xi,\nu) := \mathbf{E}\;\left[\,|U(\xi,\nu)|^2\,\right] \tag{2.40}$$

oder

$$S(\xi,\nu) = \int\limits_{IR} Q(\tau,\xi)e^{-\jmath 2\pi\nu\tau}d\tau. \tag{2.41}$$

$S(\xi,\nu)$ kann als der Leistungsanteil der Elementarwellen mit der Zeitverzögerung im Intervall $[\xi,\xi+d\xi]$ und der Frequenzverschiebung im Intervall $[\nu,\nu+d\nu]$ angesehen werden. Abb. **??** zeigt beispielhaft eine Streufunktion, vgl. [**?**]. Die Streufunktion wird als wesentliches Beschreibungsmaß für den Funkkanal in der Literatur und auch im folgenden verwendet.

Die Definition lautet:

$$P(\zeta,\nu) = \mathbf{E}\,[\,H^*(f,\nu)H(f+\zeta,\nu)\,] \tag{2.42}$$

oder

$$P(\zeta,\nu) = \int\!\!\int\limits_{IR^2} Q(\tau,\xi)e^{-\jmath 2\pi(\nu\tau+\zeta\xi)}d\xi d\tau. \tag{2.43}$$

Für eine feste Dopplerverschiebung ν entspricht sie der AKF des bzgl. der Frequenzvariablen f stationären Prozesses $H(f,\nu)$.

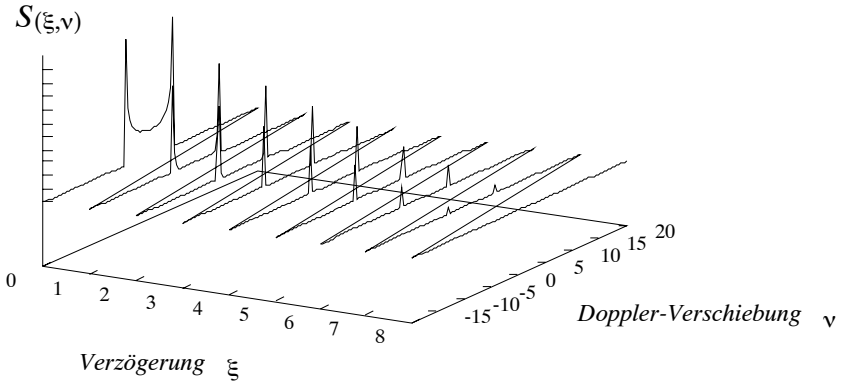

Abb. 2.10 Eine beispielhafte Streufunktion

2.3.4.1 Weitere Maße

Die Funktion

$$Q(\xi) \;:=\; Q(0,\xi) \;=\; \mathbf{E}\left[\,|h(t,\xi)|^2\,\right] \;=\; \int\limits_{I\!R} S(\xi,\nu)\,d\nu \tag{2.44}$$

wird von BELLO als *Verzögerungsleistungsdichtespektrum* (engl. Delay Power Density Spectrum) bzw. auch als *Power Delay Profile* bezeichnet. Das *Dopplerleistungsdichtespektrum* (engl. Doppler Power Density Spectrum) ist

$$P(\nu) \;:=\; P(0,\nu) \;=\; \mathbf{E}\left[\,|H(f,\nu)|^2\,\right] \;=\; \int\limits_{I\!R} S(\xi,\nu)\,d\xi. \tag{2.45}$$

Die *Frequenzkorrelationsfunktion* (engl. Frequency Correlation Function) ist

$$q(\zeta) \;:=\; R(\zeta,0) \;=\; \mathbf{E}\left[\,T^*(f,t)T(f+\zeta,t)\,\right] \;=\; \int\limits_{I\!R} Q(\xi)\,\exp -j2\pi\zeta\xi\,d\xi \tag{2.46}$$

und

$$p(\tau) \;:=\; R(0,\tau) \;=\; \mathbf{E}\left[\,T^*(f,t)T(f,t+\tau)\,\right] \;=\; \int\limits_{I\!R} P(\nu)\,\exp -j2\pi\tau\nu\,d\nu. \tag{2.47}$$

bezeichnet die *Zeitkorrelationsfunktion* (engl. Time Correlation Function). Die mittlere Zeitverzögerung ist

$$\bar{\xi} \;:=\; \frac{\int\limits_{I\!R} \xi\,Q(\xi)\,d\xi}{\int\limits_{I\!R} Q(\xi)\,d\xi}. \tag{2.48}$$

Das *Delay Spread* ist definiert als das zweite Zentralmoment

$$\sigma_\xi \;:=\; \sqrt{\frac{\int\limits_{I\!R} (\xi-\bar{\xi})^2\,Q(\xi)\,d\xi}{\int\limits_{I\!R} Q(\xi)\,d\xi}}. \tag{2.49}$$

Diese Funktionen bzw. Maße bekommen in den nächsten Kapiteln eine besondere Bedeutung.

2.3.4.2 Die unabhängig zeit- und frequenzdispersiven WSSUS-Systeme

Oft wird neben der WSSUS-Annahme noch die Unabhängigkeit der Zeit- und Frequenzdispersion für ein gegebenes System postuliert. Es läßt sich formulieren

$$\tilde{S}(\xi,\nu) \;=\; S_1(\xi)\, S_2(\nu). \tag{2.50}$$

D.h. der Mechanismus, welcher die Zeitdispersion $S_1(\xi)$ verursacht, ist unabhängig von demjenigen, welcher der Dopplerverschiebung $S_2(\nu)$ zugrunde liegt. In [**?**] werden die Konsequenzen hergeleitet. Es gilt dann

$$\tilde{Q}(\tau,\xi) = \tilde{p}(\tau)\,\tilde{Q}(\xi), \qquad \tilde{S}(\xi,\nu) = \tilde{Q}(\xi)\,\tilde{P}(\nu), \qquad \tilde{P}(\zeta,\nu) = \tilde{q}(\zeta)\,\tilde{P}(\nu). \tag{2.51}$$

Die unabhängig zeit- und frequenzdispersiven WSSUS-Systeme sind demnach bis auf die Leistung S durch die Angabe sowohl einer der beiden Funktionen $\tilde{p}(\tau)$ und $\tilde{P}(\nu)$ als auch $\tilde{q}(\zeta)$ und $\tilde{Q}(\xi)$ bestimmt.

Nun sind die in der Literatur verwendeten Modelle und ihre Parameter verständlich.

2.3.5 Das Modell nach COST 207

Die CEPT initiierte 1984 das COST 207 -Projekt, um Forschungsaktivitäten zur Wellenausbreitung und Modulation europaweit zu koordinieren. Dies stand unmittelbar im Zusammenhang mit der mangelnden Erfahrung, die man im Bereich der digitalen Übertragung in Europa hatte, [**?**], p. 1. Insbesondere sind im Abschlußbericht [**?**] alle wesentlichen Ergebnisse der Modelle für das 900 MHz Band, wie sie im GSM Verwendung finden, zusammengefaßt.

WSSUS-Systeme sind Grundlage des Modells dieser Arbeitsgruppe. Für die Modellierung werden vier verschiedene Szenarien vorgeschlagen und entsprechende Dopplerspektren, je nach Pfadverzögerung, zugeordnet. Insofern handelt es sich hier um deskriptive Modelle.

Im folgenden werden die Dopplerspektren vorgestellt, die von COST für die Modellierung des Kanals benutzt werden, [**?**], p. 135 - 147. Dabei werden folgende Abkürzungen benutzt:
– $f_d = \frac{v}{\lambda}$, bezeichnet die maximale Doppler-Verschiebung, mit v als Fahrzeuggeschwindigkeit und der Wellenlänge λ.
– $G(a, f_1, f_2)$ ist die Gauß-Funktion:

$$G(\nu) \;=\; A\, \exp\{-\frac{(\nu - f_1)^2}{2 f_2^2}\}. \tag{2.52}$$

Doppler-Spektren vom Typ *Class* werden für Pfade benutzt, deren Verzögerungszeit τ_i unter $500\,ns$ liegt. Es gilt

$$\text{(CLASS)} \quad S(\tau_i,\nu) \;=\; \frac{A}{\sqrt{1-(\frac{\nu}{f_d})^2}} \quad \text{mit } \nu \in (-f_d, f_d) \tag{2.53}$$

Das Spektrum *Gauss1* ist die Summe von zwei Gaußfunktionen und wird bei Verzögerungszeiten von $2\,\mu s$ bis $500\,ns$ eingesetzt.

$$\text{(GAUSS1)} \quad S(\tau_i,\nu) \;=\; G(A, -0.8 f_d, 0.05 f_d) + G(A_1, 0.4 f_d, 0.1 f_d)\,, \tag{2.54}$$

wobei A_1 um 10 dB kleiner ist als A.

Spektren vom Typ *Gauss2* werden für Kanäle mit Verzögerungszeiten größer $2\,\mu s$ benutzt.

$$\text{(GAUSS2)} \quad S(\tau_i,\nu) \;=\; G(B,0.7f_d,0.1f_d) + G(B_1,-0.4f_d,0.15f_d)\;, \tag{2.55}$$

wobei B_1 um 15 dB kleiner ist als B.

Das *Rice*-Spektrum ist die Addition des klassischen Doppler-Spektrums mit dem direkten Pfad (Sichtverbindung zwischen Sender und Empfänger).

$$\text{(RICE)} \quad S(\tau_i,\nu) \;=\; \frac{0.41}{2\pi f_d\sqrt{1-(\frac{\nu}{f_d})^2}} + 0.91\delta(f-0.7f_d) \quad \text{mit } \nu \in (-f_d,f_d) \tag{2.56}$$

Die Ausbreitungsmodelle für verschiedene Geländetypen werden durch ihr kontinuierliches Delay Power Profile definiert. Diese lauten:

Ländliche Umgebung
(kein hügeliges Gelände)(RU)

$$Q(\xi) = \begin{cases} e^{-0.2\xi} & : \quad 0 < \xi < 0.7 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Städtische Umgebung
(kein hügeliges Gelände)(TU)

$$Q(\xi) = \begin{cases} e^{-\xi} & : \quad 0 < \xi < 7 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Typischer schlechter Fall für ein
städtisches hügeliges Gelände(BU)

$$Q(\xi) = \begin{cases} e^{-\xi} & : \quad 0 < \xi < 5 \\ 0.5e^{5-\xi} & : \quad 5 < \xi < 10 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Typischer Verlauf für ein
hügeliges Gelände(HT)

$$Q(\xi) = \begin{cases} e^{-3.5\xi} & : \quad 0 < \xi < 2 \\ 0.1e^{-15\xi} & : \quad 15 < \xi < 20 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

2.4 Methoden im Frequenzbereich zur Generierung von korrelierten Sequenzen

Schon sehr früh wurde von JAKES eine Methode zur Modellierung von Funkkanälen vorgestellt, die auf eine Überlagerung von Zissoiden unterschiedlicher Frequenz beruht, s. [?]. Dabei wird durch Wahl der Frequenzen der Zissoiden und der zugehörigen Koeffizienten das gewünschte Spektrum nachgebildet. Insofern wird bei dieser Methode eine direkte Nachbildung des Spektrums vorgenommen und sie kann als *im Frequenzbereich liegend* angesehen werden. Ursprünglich wurden die Zissoiden im Bereich des Spektrums zufällig verteilt. Von M. PÄTZOLD stammen einige Modifikationen der Algorithmen und insbesondere genaue Untersuchungen der Eigenschaften, vgl. [?]. Die Algorithmen unterscheiden sich hinsichtlich der Wahl der Frequenzen und der Koeffizienten der Zissoiden. Folgende Möglichkeiten wurden untersucht:

– zufällige Verteilung über das Frequenzenspektrum bei angepaßten Koeffizienten;
– äquidistante Verteilung über das Frequenzenspektrum bei angepaßten Koeffizienten;

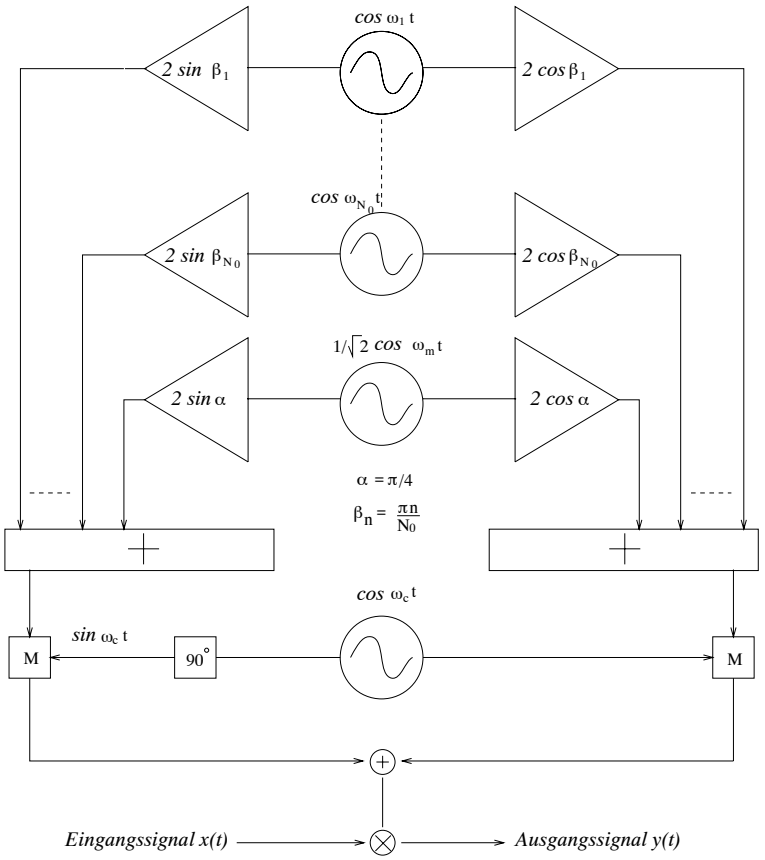

Abb. 2.11 Prinzip der Methode nach JAKES

– gleiche Koeffizienten bei angepaßter Verteilung über den Frequenzbereich des Spektrums;
– angepaßte Verteilung bei ebenfalls angepaßten Koeffizienten.
Wie Abb. **??** zeigt, setzt sich das Empfangssignal aus $N + 1$ einzelnen Komponenten mit unterschiedlichen, das Doppler-Spektrum nachbildenden Frequenzen, $2\pi\ f_d\ cos(2\pi n/N)$ $n = 1 \ldots N$, $N_0 = 0.5\,(N/2-1)$ zusammen. Die Phasen β_n sind so gewählt, daß eine Gleichverteilung angenähert wird. Die einzelnen Pfade werden gewichtet (s. Dreiecke in Abb. **??**) aufaddiert und mit der Trägerfrequenz ω_c multipliziert. Das Ausgangssignal $y(t)$ hat dann die Mittenfrequenz ω_c und die typische "Jakes" Charakteristik. Abb. **??** zeigt beispielhaft das Ergebnisspektrum $S(f)$ im Frequenzbereich bei äquidistanter Verteilung der Frequenzen über das Spektrum.

Bei P. HÖHER, s. [**?**] wird das Modell zur Untersuchung von Empfängern verwendet.

Zur simulativen Untersuchung einzelner Kommunikationsbeziehungen kann diese Methode sinnvoll sein. Nachteilig ist die mangelnde numerische Effizienz bei größeren Simulationsszenarien.

2.5 Weitere Modelle

F. GOULAM, s. [**?**], versucht mit Hilfe von Matrixoperationen Modelle zu schaffen, die nicht auf die US-Annahme zurückgreifen. Dabei werden die Korrelationen der Pfade unter-

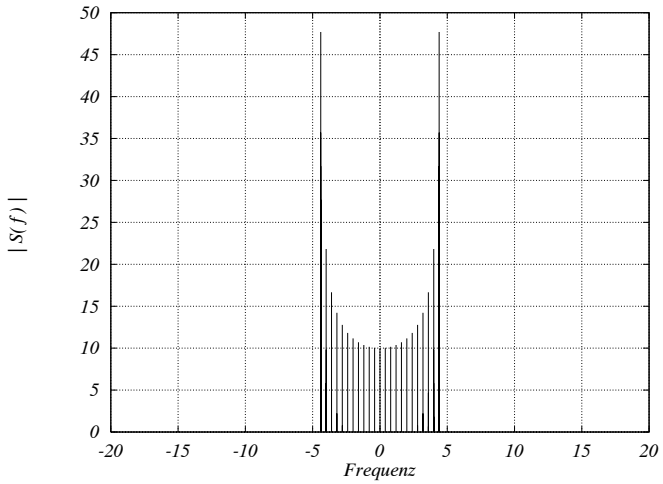

Abb. 2.12 Nachbildung des Spektrums durch Dirac-Stöße

einander durch eine Kovarianzmatrix beschrieben. Diese Matrix wird diagonalisiert. Durch diese Zerlegung wird eine Transformationsvorschrift entwickelt, die dann auf unabhängige Gauß-Prozesse Anwendung findet.

Ein von der DLR vorgeschlagenes Modell, s. [?, ?, ?, ?], verwendet zweipolige Tiefpässe als das Spektrum formende digitale Filter. Dabei werden ein Rice- und ein Rayleigh-Pfad vorgesehen, die wechselseitig zufällig den Kanal modellieren.

In [?] wird ein mehrpoliger Tiefpaß verwendet; zur Unterstützung wird das Werkzeug *COSSAP* verwendet.

2.6 Anwendung stochastischer Prozesse zur Modellierung des Funkkanals

Als Zusammenfassung der bisherigen Kapitel kann festgestellt werden:
Im Mobilfunk wird die Qualität der Übertragung durch den Schwund (engl. fading) der Einhüllenden des Signals erheblich beeinflußt. Infolgedessen kommt es zu büschelartigem Auftreten von Fehlern in der Übertragung. Traditionellerweise wird das Büschelfehlerverhalten des Funkkanals durch stochastische Prozesse modelliert. Eine allg. übliche Annahme in diesem Zusammenhang ist die im *weiten Sinne stationäre unkorrelierte Streuung* vgl. Kap. ??. Diese Annahme macht das systemtheoretische Modell für den Funkkanal mathematisch leichter behandelbar.

Das Filtern von weißem Gauß'schen Rauschen ist eine allg. bekannte und weit verbreitete Methode, um die Charakteristik des Mobilfunkkanals zu erfassen. Dabei werden die Übertragungsfunktionen der Filter so ausgelegt, daß nach dem Filter Prozesse mit dem gewünschten Spektrum vorliegen. So wird die Streufunktion durch digitale Filter nachgebildet, vgl. [?, ?]. Das Filtern kann bei einigem schaltungstechnischen Aufwand mit analogen Bausteinen erfolgen, oder aber digital. Im letzteren Fall kann das Spektrum der generierten

Prozesse relativ einfach modifiziert werden. Ein weiterer Vorteil ist, daß integrierte Simulationssysteme mit einem einzigen digitalen Rechner aufgebaut werden können, ohne daß weitere Hardware notwendig ist.

In der Literatur werden mit digitalen Filtern erzeugte Prozesse i.a. als Auto-Regressive-Moving-Average (ARMA)-Prozesse bezeichnet, vgl. [?, ?] und Kap. ??. Abb. ?? zeigt die prinzipielle Struktur eines Modells zur Generierung von ARMA-Prozessen, die multiplikativ die Einhüllende des übertragenen Signals bestimmt. Dies wird auch *multiplikative Störung* (multiplicative distortion) genannt. Die Blöcke *WGN* symbolisieren weiße Gauß'sche Rauschquellen. Daran schließen sich Filter mit der Übertragungsfunktion $H_x(f), x = 1, 2$ an. Das Basisbandsignal wird mit den Werten des ARMA-Prozesses multipliziert, so daß mit dieser Modellanordnung Zeitvariationen eines Modellpfades nachgebildet werden können. Sind mehrere Pfade relevant, muß die abgebildete Struktur für die weiteren Pfade ebenso realisiert werden, s. Kap. ??. Da Abhängigkeiten der Pfade untereinander mit Filtern nur schwer nachbildbar sind, können auf diese Weise nur WSSUS-Modelle realisiert werden.

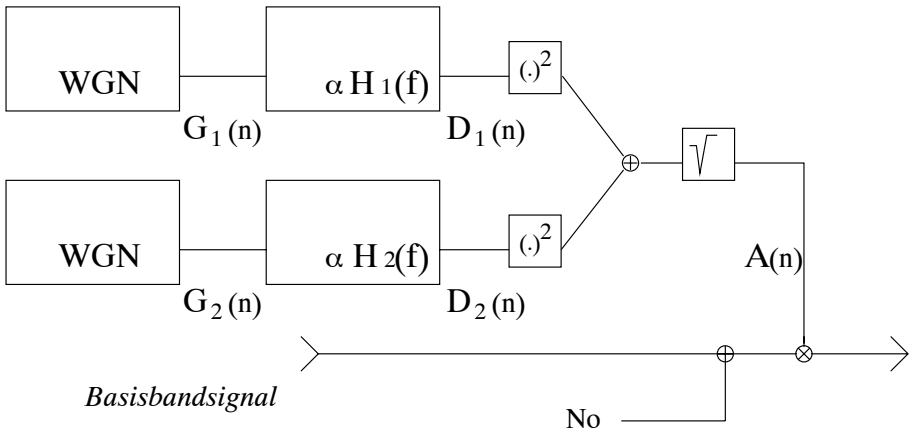

Abb. 2.13 Anordnung zur Verwendung von ARMA-Prozessen zur Modellierung multiplikativer Störungen des Funkkanals

Unter der Annahme, daß für die Übertragungsfunktion der Filter $H_x(0) = 1$ gilt, daß für die Varianz der Gauß'schen Prozesse $\{G_x(n)\}$ $\sigma_{G_x} = 1$ gilt und B_x die äquivalente Rauschbandbreite der Filter darstellt, kann die Autokorrelationsfunktion der Prozesse $\{D_x(n)\}$ durch

$$C_{D_x D_x}(k) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\,B_x}|H_x(f)|^2 \qquad x = 1, 2 \tag{2.57}$$

beschrieben werden. Dieser Zusammenhang wird als Wiener-Lee Gesetz bezeichnet. N_0 bezeichnet die zweiseitige spektrale Leistung des komplexen Gauß'schen Rauschens. Zur Bezeichnungsweise muß noch gesagt werden, daß die Spektren $S(\cdot,\cdot)$ bzw. $S_2(\cdot)$, vgl. Kap. ??, oder $P(\cdot)$ vgl. Kap. ?? nachgebildet werden, zur Vereinfachung der Schreibweise aber im folgenden lediglich, wie in der Standardliteratur üblich, $S(f) \circ\!\!-\!\!\bullet C(k)$ geschrieben wird.

Unterschiedliche stationäre Verteilungen, wie z.B. Rayleigh-, Nakagami- und Suzuki-Verteilungen erhält man durch Operationen auf die Gauß-Prozesse am Filterausgang. So kann z.B. ein Rayleigh-Prozeß durch die geometrische Addition von zwei Gauß-Prozessen gebildet

werden, vgl. Abb. **??**. Bei dem Suzuki-Prozeß wird der Lognormal-Anteil durch Exponentiation eines Gauß-Prozesses gebildet, vgl. [**?**].

Stochastische Prozesse mit kontinuierlichem Zustandsraum können auf Prozesse mit diskretem Zustandsraum abgebildet werden. Dadurch ergeben sich einige Vorteile. Die sich bei diesen Prozessen einstellenden Fehler-Prozesse können mathematisch relativ einfach beschrieben werden, vgl. Kap. **??**. Ein weiterer Vorteil ist, daß das Einschwingen der Filter entfällt, so daß Parameteränderungen, wie z.B. Variationen der Geschwindigkeit, in Simulationsszenarien mit mehreren mobilen Stationen möglich sind. Außerdem sind Zustandsmodelle bzgl. ihrer numerischen Effizienz sehr viel günstiger für die stochastische Simulation, so daß größere Szenarien untersucht werden können.

Doch zunächst soll, um der formalen Deutlichkeit willen, die mathematische Definition der ARMA-Prozesse nachgeholt werden.

2.6.1 Definition der ARMA-Prozesse

Definition 6 (*Auto-Regressiver-Moving-Average (ARMA) - Prozeß*)

Ein SP $X = \{X_t\,,\, t \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$X_t \;=\; \sum_{j=1}^{m} b_j\, X_{t-j} \;+\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, \mathcal{E}_{t-i} \qquad a_0 = 1,\; a_n \neq 0,\; b_m \neq 0 \tag{2.58}$$

heißt *auto-regressiver-moving-average - Prozeß* der Ordnung (m, n) falls
$\mathcal{E}= \{\mathcal{E}_t\,,\, t \in \mathbb{Z}\}$ eine mittelwertfreie Folge unkorrelierter Zufallsvariablen bezeichnet mit $\mathrm{var}\, \mathcal{E}_t > 0$, $\mathbf{E}\,[\mathcal{E}_t] = 0$. □

Dabei stellt Gl. **??** die mathematische Beschreibung eines mit Gauß'schem Rauschen gespeisten rekursiven digitalen Filters dar. Daneben werden in diesem Zusammenhang MA- bzw. AR-Prozesse definiert, die sich durch Einschränkungen aus der Definition der ARMA-Prozesse ergeben. Eine ausführlichere Beschreibung findet man in der Literatur, z.B. [**?**].

Je nach Auslegung des in Abb. **??** gezeigten digitalen Filters liegt also ein MA-, AR-, oder ARMA-Prozeß vor. Im Modell nach [**?**] wurde ein ARMA(2,2) Prozeß vorgeschlagen, der hier in späteren Kapiteln noch Verwendung findet.

Verallgemeinerte Gilbert-Elliott-Modelle

In diesem Kapitel werden Modelle behandelt, die in früheren Publikationen verallgemeinerte Gilbert-Elliott-Modelle genannte wurden, vgl. [?]. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten in den jeweiligen Zuständen nicht identisch Eins oder Null sind, sondern im Intervall (0,1) verteilt sind. Dadurch ergeben sich für die realitätsnahe Modellierung des Funkkanals einige Vorteile. Die Algorithmen zur Parametrisierung sind i.a. weniger komplex als bei einfachen Zustandsmodellen für den Funkkanal. Weiterhin ergeben sich durch die zusätzlichen Freiheitsgrade einige interessante Eigenschaften. Zur Parametrisierung wurden unterschiedliche Algorithmen entworfen, die im folgenden vorgestellt und vergleichend analysiert werden sollen.

3.1.1 Markov-Modelle für den Funkkanal

Sei $\mathbb{E} = \{1, 2, \ldots, m\}, m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge von Zuständen und $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeitdiskreter Prozeß über $\mathbb{E}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$q_{i,j} \;=\; Pr\left\{J(t+1) \;=\; j \;\middle|\, J(t) \;=\; i\right\} \qquad i,j \in \mathbb{E} \tag{3.1}$$

seien unabhängig vom Index t, d.h. der stochastische Prozeß wird als homogen angenommen. Wird die stochastische Matrix $\mathbf{q}$ als irreduzibel und rekurrent[1] angenommen, können die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten durch

$$\underline{\gamma}^{\,T} \;=\; \underline{\gamma}^{\,T}\,\mathbf{q} \tag{3.2}$$

mit $\underline{\gamma} = (\gamma_{i\in\mathbb{E}})$ und $\mathbf{q} = (q_{i,j\in\mathbb{E}})$ berechnet werden. Dieser Prozeß kann durch eine Markov-Kette beschrieben werden, vgl. Definition 1.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können bestimmt werden, indem ein Musterprozeß beobachtet wird. Dieser Musterprozeß kann durch Messungen in der Natur bestimmt werden

[1] Hier wird die *Klassifikation* des Prozesses bzgl. des *Rückkehrverhaltens in gerade belegte Zustände* und der *Erreichbarkeit von Zuständen* angesprochen. Dabei wird ein Zustand als *rekurrent* bezeichnet, wenn die Rückkehrwahrscheinlichkeit identisch Eins ist. *Positive Rekurrenz* liegt vor, falls die erwartete Rückkehrzeit endlich ist. Die Menge der rekurrenten Zustände eines Markov-Prozesses läßt sich in irreduzible Teilmengen zerlegen. Die Eigenschaft *irreduzibel* beschreibt die Erreichbarkeit der Zustände untereinander, so daß eine irreduzible Teilmenge eine Klasse sich gegenseitig erreichbarer Zustände bildet. Eine ausführliche Klassifikation von Markov-Prozessen bzw. ihrer Zustände kann hier unterbleiben, da alle Zustände der hier betrachteten Markov-Prozesse stets irreduzibel und positiv rekurrent sind, vgl. [?], p. 27 ff. Alle hier behandelten Markov-Prozesse sind deshalb auch *ergodisch*.

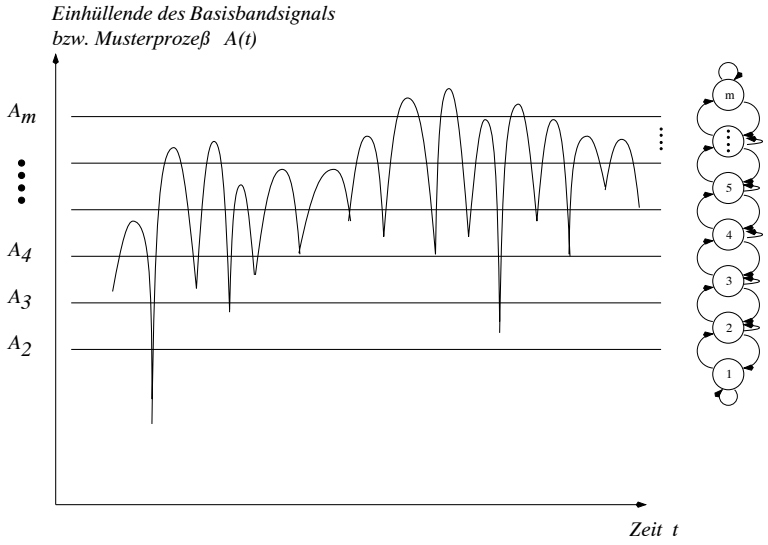

Abb. 3.1 Quantisierung des Prozesses

oder auch durch stochastische Simulation. Oft wird dieser Prozeß durch Filtern von weißem Gauß'schen Rauschen gewonnen, vgl. Kap. **??** und [**?**, **?**].

Darüber hinaus lassen sich verschiedene Abbildungen der Zustände auf den nachgebildeten Kanalprozeß,[2] der als $\{\tilde{J}(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ über $\tilde{\mathbb{E}}$ bezeichnet werden soll, denken. Es gilt also

$$f: \ \mathbb{E} \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}, \tag{3.3}$$

wobei $f(\cdot)$ keine lineare Abbildung sein muß. In den folgenden Kapiteln werden einige Abbildungen vorgestellt und diskutiert.

Sei der Prozeß $\{A(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ der *Musterprozeß* mit Zustandsraum $\mathbb{R}$ und sei

$$\mathbb{A} = \{A_2, A_3, \ldots, A_m\} \tag{3.4}$$

eine geordnete Menge von *Schwellen* mit $A_i < A_{i+1}, i = 2..m-1$. Der diskretisierte *Zustandsprozeß* $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ sei im Zustand i zum Zeitpunkt k, falls gilt

$$A_i < A(k) < A_{i+1} \quad \text{für} \ \ i = 2..m-1, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.5}$$

bzw.

$$A(k) > A_m \quad \text{für} \ \ i = m \ \ \text{und} \ \ A(k) < A_2 \quad \text{für} \ \ i = 1, \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.6}$$

Abb. **??** verdeutlicht das Prinzip der entsprechenden Quantisierung. Gemäß Gl. **??** wird ein Werteintervall des Musterprozesses, das durch die Schwellen A_j und A_{j+1} begrenzt ist, auf den Zustand j abgebildet. Ein Übergang $i \rightarrow j$ dieses Prozesses $\{J(t)\}$ bedeutet, daß die Schwellen

$$\begin{cases} A_l & \text{für alle} \quad l = i..j+1 \quad \text{falls} \quad i > j \\ A_k & \text{für alle} \quad k = j..i+1 \quad \text{falls} \quad i < j, \ i, j \in \mathbb{E} \end{cases} \tag{3.7}$$

[2] Als *Kanalprozeß* bzw. *Fadingprozeß* $\{\tilde{J}(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ wird die Nachbildung der Zeitvariation des Basisbandsignal bezeichnet. Dieser Prozeß läßt sich als ein dem *Fehlerprozeß* unterlagerter Prozeß auffassen, s. auch Einleitung zu Kap. 4 und besitzt einen von $\mathbb{E} = \{1, 2, \ldots, m\}$ verschiedenen Zustandsraum $\tilde{\mathbb{E}}$. Dieser Prozeß ist zu unterscheiden von dem Zustandsprozeß $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ über $\mathbb{E}$.

überschritten werden. Eine Approximation kann vorgenommen werden, indem für langsam veränderliche Prozesse nur Überschreitungen über die jeweils nächste Schwelle zugelassen werden. Zur Parametrisierung werden Pegelkreuzungsraten verwendet, auf die im folgenden eingegangen werden soll.

3.1.2 Grundlegendes zu Pegelkreuzungsraten

Die Berechnung der Pegelkreuzungsraten (engl. Level Crossing Rate, LCR) von stochastischen Prozessen hat eine lange Tradition, obwohl es in der Vergangenheit nur wenige direkte Anwendungen gab. In jüngster Zeit erreichte diese Disziplin im Mobilfunk Aktualität, da Fading-Erscheinungen auf diese Weise modelliert werden können, [?]. Wesentliche Untersuchungen gehen auf S. O. RICE zurück, s. [?, ?] .

Bezeichnet $\{r(t), t \in \mathbb{R}\}$ einen stochastischen Prozeß,[3] dann gilt für die Pegelkreuzungsrate

$$N_l(r_0) \;=\; \int_0^\infty \dot{r}\, f_{r\dot{r}}(r_0\,, \dot{r})\, d\dot{r}, \tag{3.8}$$

dabei bezeichnet der Punkt die zeitliche Ableitung und $f_{r\dot{r}}(\cdot,\cdot)$ die Verbunddichte von $\{r(t)\}$ und $\{\dot{r}(t)\}$.

Lee berechnet in [?] den Ableitungen in [?] folgend $f_{\dot{r}r}(\cdot,\cdot) = f_r(\cdot)\, f_{\dot{r}}(\cdot)$, dabei werden $\{r(t)\}$ und $\{\dot{r}(t)\}$ als unkorreliert und unabhängig angenommen. Dies gilt nur für Gauß-Prozesse, wie die Ableitung in [?] p. 347 zeigt. Mathematisch allgemeiner sind die Ableitungen in [?], da sie über eine Matrix die Korrelationen von Real- und Imaginärteil des komplexen Gauß-Prozesses $\{r(t)\}$ berücksichtigen, wie auch die Korrelationen zwischen dem Prozeß $\{r(t)\}$ und seiner Ableitung $\{\dot{r}(t)\}$, s. [?] p. 600. Für den Verbund-Prozeß ergibt sich dann ein multivariater Gauß-Prozeß. In [?] p. 124 wurde dagegen noch vereinfachend die Unabhängigkeit von dem Prozeß und seiner Ableitung angenommen.

Die spektralen Eigenschaften gehen über die Momente, bzw. Kreuz-Momente als Matrixeinträge mit in die Rechnung ein. Die Momente des parametrisierenden Prozesses berechnen sich mit der Trägerfrequenz f_c als[4]

$$b_n \;=\; \frac{d^n}{d\tau^n}\, C_{rr}(\tau)\bigg|_{\tau=0} \;=\; (2\pi)^n \int_0^\infty S_{rr}\,(f)\;(f \;-\; f_c)^n\, df. \tag{3.9}$$

Offensichtlich muß je nach Leistungsdichte-Spektrum $S_{rr}(\cdot)$ des parametrisierenden Prozesses die Pegelkreuzungsrate neu berechnet werden. Die üblich genannte Lösung

$$b_2 \;=\; \frac{1}{2}\,(2\,\pi)^2\; {f_d}^2\, b_0 \tag{3.10}$$

[3] In der Literatur wurden bisher die Pegelkreuzungsraten von zeitkontinuierlichen Prozessen bestimmt. Wie man analog Hilfsatz 1 zeigen kann, ergibt sich bei zeitdiskreten Prozessen als Pegelkreuzungsrate die auf die Abtastrate normierte Pegelkreuzungsrate der zeitkontinuierlichen Prozesse. Dieser Normierungsfaktor wird auch in Gl. ?? berücksichtigt. Eine ausführliche Diskussion der *Abtastung zeitkontinuierlicher Prozesse* findet man in [?] p. 206.

[4] Man beachte, daß gilt $C_{rr'}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\, C_{rr}(\tau)$ und $C_{r'r'}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}\, C_{rr}(\tau)$ falls $\{r(t)\}$ im quadratischen Mittel differenzierbar ist, s. [?] p. 238.

ergibt sich für das klassische Spektrum nach Jakes

$$S_{rr}(f) = \left(1 - \left(\frac{f - f_c}{f_d}\right)^2\right)^{1/2} \quad \text{für } |f - f_c| \leq f_d, \tag{3.11}$$

vgl. [?]. Mit der Doppler-Frequenz f_d ergibt sich als Verbunddichte

$$f_{r,\dot{r},\vartheta,\dot{\vartheta}}(r,\dot{r},\vartheta,\dot{\vartheta}) = \frac{r^2}{4\pi^2 b_0 b_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{b_0} + \frac{\dot{r}^2}{b_2} + \frac{r^2\,\dot{\vartheta}}{b_2}\right)\right\}, \tag{3.12}$$

wobei gilt $\tan(\vartheta) = \Im\{r(t)\} \,/\, \Re\{r(t)\}$. Wird Gl. ?? über ϑ von 0 bis 2π und $\dot{\vartheta}$ von $-\infty$ bis ∞ integriert, erhalten wir

$$f_{r,\dot{r}}(r,\dot{r}) = \frac{r}{b_0} \exp\left\{-\frac{r^2}{2b_0}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} \exp\left\{-\frac{\dot{r}^2}{b_2}\right\}. \tag{3.13}$$

Es ergeben sich in diesem Fall unabhängige Rayleigh- und Gauß-Verteilungen für den Prozeß und seine Ableitung.

Es soll hier noch betont werden, daß die Varianz b_2 des abgeleiteten Prozesses durch die negative Krümmung der AKF im Nullpunkt gegeben ist, $b_2 = -C''_{rr}(\tau = 0)$. Nach einigen Umformungen folgt[5]

$$N_l(r_0) = \sqrt{\pi}\, f_d \frac{r_0}{\sqrt{b_0}} \exp\left\{-\frac{{r_0}^2}{2b_0}\right\}. \tag{3.14}$$

Der allgemeinere Fall ist durch die Rice-Verteilung gegeben, bei der die beiden den Rice-Prozeß bildenden Gauß-Prozesse nicht identische Varianzen aufweisen. Für den Rice-Prozeß ergibt sich

$$N_l(r_0) = \sqrt{\pi}\, f_d \frac{r_0}{\sqrt{b_0}} I_0\left(\frac{r_0\, c}{\sqrt{b_0}}\right) \exp\left\{-\frac{{r_0}^2 + c^2}{2b_0}\right\}, \tag{3.15}$$

wobei c der sog. Rice-Faktor ist und I_0 die modifizierte Bessel-Funktion 0-ter Ordnung.

Offensichtlich wird bei dieser Vorgehensweise die Pegelkreuzungsrate durch

$$N_l(r_0) = \left(\frac{b_2}{2\pi}\right)^{1/2} f_r(r_0) \tag{3.16}$$

dargestellt, wobei $f_r(\cdot)$ die stationäre Verteilungsdichte des entsprechenden Prozesses ist.

Rice gibt in seinem Beitrag [?] auch die Momente für ein Gauß-förmiges bzw. ein ideales Tiefpaß-Spektrum an. Dabei ist nach Gl. ?? nicht der genaue Verlauf des Spektrums relevant, sondern lediglich die Momente b_0 und b_2.

3.1.3 Approximation der Übergangswahrscheinlichkeiten mit Pegelkreuzungsraten

Wird der Algorithmus, der schon 1982 von L. Kittel in [?] vorgestellt wurde, zu einem Modell mit mehr als zwei Zuständen erweitert, können die Übergangswahrscheinlichkeiten

[5] In dem Beitrag von [?] ist die Herleitung der Pegelkreuzungsrate völlig unzureichend und demzufolge das Ergebnis, Gl. (11), nicht nur unverständlich, sondern m.E. auch falsch.

ebenso mit Hilfe der Pegelkreuzungsraten berechnet werden. Parallel zu den vorliegenden Arbeiten wurde ein vergleichbarer Algorithmus von H. S. WANG und N. MOAYERI entwickelt und in [?] bzw. [?] veröffentlicht.

Der Prozeß $\{A(t), t \in \mathbb{N}_0\}$, der als Musterprozeß dienen soll, wird als langsam veränderlicher Prozeß angenommen, so daß die Markov-Kette $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ nur jeweils benachbarte Schwellen überschreitet. Folglich gehören aufeinanderfolgende Werte von $\{J(t)\}$ zu benachbarten Zuständen oder zum gleichen Zustand. Das bedeutet $q_{i,j} = 0 \quad$ für alle $|i-j| > 1$. Es ergibt sich für die Übergangsmatrix eine Band-Diagonal-Struktur.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette können dann approximativ mit Hilfe der Pegelkreuzungsraten $N_l(\cdot)$ des Musterprozesses bestimmt werden. Sie sind proportional zur Pegelkreuzungsrate, vorausgesetzt, der Wert des Musterprozesses liegt in dem Bereich zwischen den entsprechenden zwei Schwellen. Der Wertebereich zwischen zwei Schwellen wird dem von ihnen eingeschlossenen Zustand zugeordnet, vgl. Gl. ?? und Abb. ??. So ergibt sich

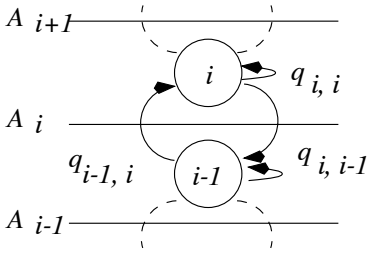

Abb. 3.2 Skizze

$$q_{i-1,i} = \frac{N_l(A_i)}{R_t(F(A_i) - F(A_{i-1}))}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß $\{J(t)\}$ in den Zustand i wechselt, vorausgesetzt, der Prozeß war vorher im Zustand $i-1$. Dabei bezeichnet R_t die Abtastrate. Die stationäre Verteilungsfunktion des Musterprozesses $\{A(t)\}$ ist $F(\cdot)$. Abb. ?? erläutert den Zusammenhang. Der vollständige Satz von Übergangswahrscheinlichkeiten ist dann

$$\begin{aligned}
q_{1,2} &= \frac{N_l(A_2)}{R_t\, F(A_2)} \\
q_{1,1} &= 1 - q_{1,2} \\
q_{i-1,i} &= \frac{N_l(A_i)}{R_t\,(F(A_i) - F(A_{i-1}))} && i = 3..m \\
q_{i,i-1} &= \frac{N_l(A_i)}{R_t\,(F(A_{i+1}) - F(A_i))} && i = 2..(m-1) \\
q_{i,i} &= 1 - p_{i,i-1} - p_{i,i+1} && i = 3..(m-1) \\
q_{m,m-1} &= \frac{N_l(A_m)}{R_t\,(1 - F(A_m))} \\
q_{m,m} &= 1 - p_{m,m-1} \\
q_{m-1,m-1} &= 1 - p_{m-1,m} - p_{m-1,m-2}, && (3.17)
\end{aligned}$$

dabei bezeichnet

$$N_l(A_i) = \sqrt{2\,\pi}\, f_d\, \frac{A_i}{\rho}\, \exp\left\{ -\left(\frac{A_i}{\rho}\right)^2 \right\} \qquad (3.18)$$

die Pegelkreuzungsrate bezüglich der Schwelle A_i, vorausgesetzt, der Musterprozeß ist ein

Rayleigh-Prozeß, vgl. Kap. **??** mit der VDF

$$f_J(x) \;=\; \frac{2\,x}{\rho^2}\,\exp\left\{-\left(\frac{x}{\rho}\right)^2\right\}. \tag{3.19}$$

ρ^2 bezeichnet die mittlere Leistung des Basisbandsignals, die Dopplerfrequenz ist $f_d = \frac{v}{\lambda}$, v bezeichnet die Geschwindigkeit der mobilen Stationen, die Wellenlänge ist λ. Zustandsmodelle, die nach diesen Gln. parametrisiert sind, werden im folgenden LCR-Modelle genannt.

Als Folge des Algorithmus Gl. **??** ist $\mathbf{q}$ eine schwachbesetzte Band-Diagonal-Matrix, die in der Literatur auch Jakobi-Matrix genannt wird. Sie weist einige bemerkenswerte Eigenschaften auf, die im folgenden dargestellt werden sollen.

Satz 1: Bezeichnet $F(\cdot)$ die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zustandskontinuierlichen stochastischen Prozesses, so gilt für die stationäre Zustandswahrscheinlichkeit $\underline{\gamma} = (\gamma_i)$ mit $i \in \mathbb{E}$ des zugeordneten, nach Gl. **??** parametrisierten Markov-Prozesses

$$\gamma_i \;=\; F(A_{i+1}) - F(A_i) \qquad \text{für alle } A_i \in \mathbb{A} \text{ mit } i = 2..m-1, \tag{3.20}$$

$$\gamma_1 \;=\; F(A_2), \qquad \gamma_m \;=\; 1 \;-\; F(A_m).$$

□

Beweis: Das LCR-Modell erlaubt nur Übergänge in Nachbarzustände, deshalb lassen sich die Gleichgewichtsgleichungen formulieren als

$$\gamma_1\, q_{1,2} \;=\; \gamma_2\, q_{2,1}, \qquad \gamma_{m-1}\, q_{m-1,m} \;=\; \gamma_m\, q_{m,m-1} \tag{3.21}$$

und

$$\gamma_i\;(q_{i,i+1} \;+\; q_{i,i-1}) \;=\; \gamma_{i+1}\, q_{i+1,i} \;+\; \gamma_{i-1}\, q_{i-1,i}. \tag{3.22}$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzen. □

Sei $\{\eta_{\uparrow t}, t \in \mathbb{N}_0\}$ ein binärer stochastischer Prozeß abgeleitet von $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\eta_{\uparrow t} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } \; J(t-1) < x_g \quad \text{und} \quad J(t) > x_g \; \text{ für alle } \; t \\ 0 & \text{sonst, } \; x_g \in \mathbb{A}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Hilfsatz 1: Die mittlere Anzahl der positiven Kreuzungen des Prozesses $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ bezüglich des Pegels $x_g \in \mathbb{A}$ ist[6]

$$\mathbf{E}\,[\,\eta_{\uparrow t}\,] \;=\; N_l(x_g)/R_t. \tag{3.24}$$

□

Beweis: Mit der Definition des Erwartungswertes und Satz 1 folgt

$$\mathbf{E}\,[\,\eta_{\uparrow t}\,] \;=\; Pr\{J(t-1) < x_g \;\wedge\; J(t) > x_g\} \;=\; \sum_{k=0}^{g-1}\sum_{l=g}^{m} \gamma_k\, q_{k,l}. \tag{3.25}$$

Da das LCR-Modell nur Übergänge in Nachbarzustände erlaubt, reduziert sich die Gl. zu

[6] Die negativen Pegelkreuzungen $\mathbf{E}\,[\,\eta_{\downarrow t}\,]$ lassen sich analog erfassen.

$$\mathbf{E}\,[\,\eta_{\uparrow t}\,] \;=\; \gamma_{g-1}\,q_{g-1,g} \;=\; F(A_g) - F(A_{g-1})\;\frac{N_l(x_g)}{(F(A_g) - F(A_{g-1}))\,R_t} \;=\; \frac{N_l(x_g)}{R_t}. \qquad (3.26)$$

□

Satz 2: Die lokale Korrelation am Punkt $x_g \in \mathbb{A}$ bezüglich der Distanz Eins[7] eines Markov-Modelles, parametrisiert nach Gl. **??**, ist identisch dem Komplement der Pegelkreuzungsrate an diesem Punkt bezogen auf den Faktor $F(\cdot)(1 - F(\cdot))$ □

Beweis: Die lokale Korrelation einer Markov-Kette ist

$$\rho_1(x_g) = 1 \;-\; \frac{\sum_{k=0}^{g-1}\sum_{l=g}^{m}\,\gamma_k\,q_{k,l}}{F(x_g)} - \frac{\sum_{k=g}^{m}\sum_{l=0}^{g-1}\,\gamma_k\,q_{k,l}}{1 - F(x_g)} \qquad x_g \in \mathbb{A}, \qquad (3.27)$$

s. [**?**] Gl. 6a,b und [**?**]. Das LCR-Modell erlaubt nur Übergänge in Nachbarzustände, deshalb reduziert sich die Gl. zu

$$\rho_1(x_g) = 1 \;-\; \frac{\gamma_{g-1}\,q_{g-1,g}}{F(x_g)} - \frac{\gamma_g\,q_{g,g-1}}{1 - F(x_g)}. \qquad (3.28)$$

Mit Satz 1 und der stationären Zustandswahrscheinlichkeit $F(\cdot)$ folgt

$$\rho_1(x_g) = 1 \;-\; \frac{N_l(x_g)}{R_t\,F(x_g)} - \frac{N_l(x_g)}{R_t\,(1 - F(x_g))} \;=\; 1 - \frac{N_l(x_g)}{R_t\;F(x_g)\,(1 - F(x_g))} \qquad (3.29)$$

und somit die Behauptung. □

Bei einer Parametrisierung nach Gl. **??** wird also die Pegelkreuzungsrate erhalten. Dies wird bei den folgenden Algorithmen, s. Kap. **??**, nicht unbedingt der Fall sein, dennoch werden sie bestimmte Eigenschaften des parametrisierenden Prozesses, z.B. das Spektrum, besser nachbilden.

3.1.3.1 Eigenschaften von Jakobi-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{q}$, die die Übergangswahrscheinlichkeiten des Zustandsprozesses enthält, ist eine Jakobi-Matrix. Nach [**?**], p. 77 läßt sich die charakteristische Gleichung einer Jakobi-Matrix durch eine einfache Rekursionsformel bestimmen. Unter folgender Annahme für die Struktur der Matrix $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

läßt sich das charakteristische Polynom rekursiv berechnen als

$$D_k(\lambda) \;=\; (a_k - \lambda)\,D_{k-1} \;-\; b_{k-1}\,c_{k-1}\,D_{k-2} \qquad \text{mit} \quad D_0(\lambda) = 1,\; k \geq 1. \qquad (3.30)$$

[7] Diese *Distanz* wird auch als *Ordnung* bezeichnet.

Die Eigenwerte[8] (EWe) sind reell, Anhang Satz 9. Es soll hier angemerkt werden, daß sie außerdem im Einheitskreis liegen, was aus der Tatsache folgt, daß bei der stochastischen Matrix $\mathbf{q}$ die Zeilensummen stets Eins ergeben, [?, ?, ?].

Nach einigen Umformungen kann man leicht feststellen, daß die EWe für $m = 2$ positiv sind, falls gilt $(a_1 a_2) \geq (b_1 c_1)$. Für $m = 3$ und $m = 4$ sind entsprechende Bedingungen ableitbar. Für Matrizen höherer Ordnung ist die Nullstellensuche des charakteristischen Polynoms sehr aufwendig, so daß kein allgemeiner Beweis möglich ist.

Über die Untersuchung der Hauptunterdeterminanten kann festgestellt werden, ob die Matrix $\mathbf{q}$ positiv (semi) definit ist, s. Anhang Satz 10 und 11. Es lassen sich jedoch auch für Jakobi-Matrizen keine geschlossenen Formen für die Hauptunterdeterminanten formulieren, wie man leicht nachprüfen kann. Es gilt analog Gl. **??**

$$H_k \;=\; a_k\, H_{k-1} \;-\; b_{k-1}\, c_{k-1}\, H_{k-2} \qquad \text{mit } H_0(\lambda) = a_1,\; k \geq 1. \tag{3.31}$$

So ist ein expliziter Nachweis, daß alle Hauptunterdeterminanten positiv bzw. nicht-negativ sind, im konkreten Fall unerläßlich.

Die Praxis hat gezeigt, daß in allen relevanten Fällen die Hauptunterdeterminanten und damit die EWe positiv waren. Das Verhältnis der Diagonalelemente zu den Nachbarelementen ist dabei eine entscheidende Größe, wie für $m = 2$ oben gezeigt wurde.

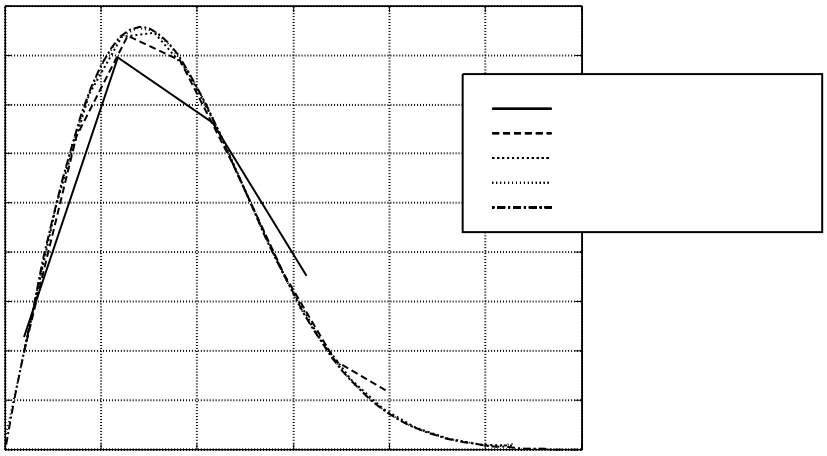

Abb. 3.3 Stationäre VDF von Zustandsmodellen, $m = 4..32$

In Abb. **??** ist die stationäre Verteilungdichtefunktion (VDF) eines Markov-Modells, das nach Gl. **??** parametrisiert wurde, dargestellt. Als Musterprozeß wurde ein Rayleigh-Prozeß verwendet. Offensichtlich kann mit einer größeren Anzahl an Zuständen die stationäre VDF des parametrisierenden Prozesses (hier die Rayleigh-VDF) besser nachgebildet werden. Das Zustandsmodell mit 32 Zuständen kann die stationäre Verteilung des Musterprozesses am

[8] Im Anhang findet sich eine kurze Zusammenfassung über Matrizentheorie. Weiterhin ist [?] p. 86 - 111 zur Einführung in die Thematik geeignet.

besten approximieren. Die Anzahl der Zustände bestimmt jedoch auch nachhaltig den sich einstellenden Fehlerprozeß, der jedoch erst in späteren Kapiteln diskutiert werden soll.

Bisher wurde implizit angenommen, daß die Abbildung des zustandsdiskreten Markov-Prozesses $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ auf den Kanalprozeß $\{\tilde{J}(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ linear erfolgt. Zumindest ist dies eine Konsequenz der äquidistanten Anordnung der Schwellen, s. Abb. **??**. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich

$$b_i = \frac{(A_{i+1} + A_i)}{2}. \tag{3.32}$$

Werden die Schwellen so angeordnet, daß sich für den Vektor der stationären Wahrscheinlichkeiten gleiche Komponentenwerte ergeben, kann eine optimierte Unterteilung der Verteilungsdichtefunktion vorgenommen werden[9].

3.1.3.2 Optimierter Algorithmus unter Verwendung der Pegelkreuzungsraten

Bei Unterteilung der Verteilungsdichtefunktion in flächengleiche Abschnitte gilt offensichtlich

$$\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)\,dx = \int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\,dx \quad \text{für } k = 3..m-1. \tag{3.33}$$

Für $m = 2$ kann sehr einfach gezeigt werden, daß aus einer flächengleichen Unterteilung der Verteilungsdichtefunktion eine gleichmäßige Verteilung über den Zustandsraum des diskreten Modells folgt. Die Übergangsmatrix ist dann

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_t} \begin{pmatrix} (1 - N_l(A_1)/F(A_1) & N_l(A_1)/F(A_1) \\ N_l(A_1)/(1 - F(A_1)) & 1 - N_l(A_1)/(1 - F(A_1)) \end{pmatrix}$$

mit den stationären Wahrscheinlichkeiten

$$\gamma_1 = \frac{q_{21}}{q_{12} + q_{21}}, \qquad \gamma_2 = \frac{q_{12}}{q_{12} + q_{21}}.$$

Wird A_2 so gewählt, daß gilt $F(A_2) = 0.5$, dann sind die Nenner aller Matrixelemente gleich und es ergibt sich $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$.

Als Beispiel sollen für diese optimierte Aufteilung der Verteilungsdichtefunktion numerische Werte für die Rayleigh-Verteilung und $m = 2$ und $m = 3$ angegeben werden.

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0.9786 & 0.0213 \\ 0.0206 & 0.9794 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0.9680 & 0.0320 & 0.0000 \\ 0.0319 & 0.9417 & 0.0263 \\ 0.0000 & 0.0262 & 0.9737 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Dabei wurde $f_d/R_t = 0.01$ gewählt, wie es sich für das GSM-System mit $R_t = 270$ kHz bei einer Geschwindigkeit von 835 m/s ergibt[10]

Die Schwellen für $m = 3$ sind dann $\mathbb{A} = \{0.636695, 1.04827\}$. Die jeweiligen Mittelpunkte, die durch die Abbildung $f(i)$ mit $i \in \mathbb{E}$ realisiert werden, sind $\{0.318348, 0.84248, 1.86958\}$. Mit diesen Werten ergibt sich $\underline{\gamma} = (0.327309, 0.332506, 0.340186)^T$.

[9] Für diese Idee danke ich meinem Kollegen Peter Decker

[10] Im Landmobilfunk werden diese Geschwindigkeiten nicht erreicht. Die Parametrisierung wurde wegen der besseren Darstellung gewählt.

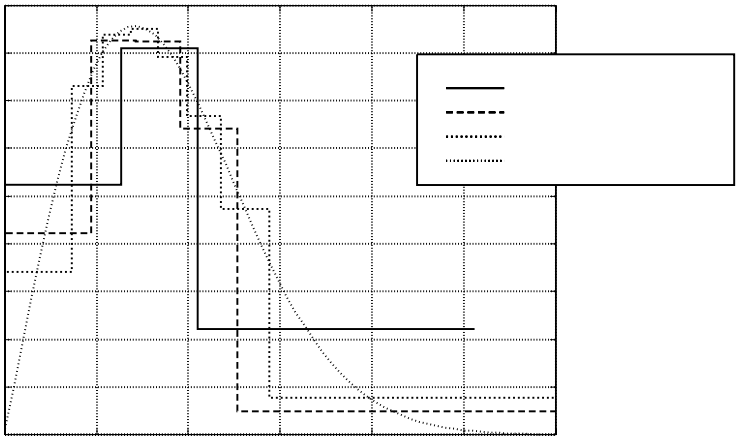

Abb. 3.4 Stationäre VDF von Zustandsmodellen bei optimierter Parametrisierung

Abb. ?? vergleicht die Approximation des Rayleigh-Prozesses durch LCR-Modelle mit Parameter m. Dabei ist der hier untersuchte Verlauf der stationären VDF nur ein mögliches Kriterium für die Nachbildung des Rayleigh-Prozesses. Ein weiteres Kriterium, der resultierende Fehlerprozeß, wird in Kap. ?? untersucht.

Nun soll eine weitere Möglichkeit vorgestellt werden, die Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen.

3.1.4 Schätzen der Übergangswahrscheinlichkeiten

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können bestimmt werden, indem ein Musterprozeß beobachtet wird. Dieser Musterprozeß kann durch Messungen in der Natur gewonnen werden oder auch durch stochastische Simulation. Oft wird dieser Prozeß durch Filterung von weißem Gauß'schen Rauschen gewonnen, vgl. Kap. ??. Da diese Prozesse auch ARMA-Prozesse genannt werden, kann die im folgenden beschriebene Methode als Quantisierung von ARMA-Prozessen realisiert werden.

Der MLE (Maximum Likelihood Estimator) wird benutzt, um Übergangswahrscheinlichkeiten zu schätzen, vgl. [?]. Auch hier werden wieder die Schwellen nach Gln. ??, ??, in Verbindung mit dem Musterprozeß gesehen. Die Intervalle zwischen den Schwellen werden auf Zustände abgebildet.

Bezeichne $n_{i,j}$ die Anzahl der Übergänge des Musterprozesses von Zustand i nach j und n_i die Anzahl der Übergänge insgesamt aus i heraus, dann läßt sich der Schätzer bilden durch

$$\hat{q}_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n_i} \quad i,j \in \mathbb{E}. \tag{3.35}$$

In diesem Fall ist die Matrix $\mathbf{q}$ stärker besetzt. Übergänge über sehr viele Schwellen sind aber eher selten, so daß sich sehr wohl Nullelemente für $q_{i,j}$, falls $|i-j|$ sehr groß, ergeben können. Auch hier zeigt sich in der Praxis, daß i.a. die EWe größer Null und reell sind.

Die Diskussion der bisher vorgestellten Algorithmen soll sich auf einige theoretische Überlegungen beschränken. Wie schon erwähnt, sind die Algorithmen sehr ähnlich. Wenn zur Parametrisierung der Prozesse ein relativ langsamer Musterprozeß verwendet wird, ergeben sich sogar identische Übergangsmatrizen, was aus der Definition der Pegelkreuzungsraten folgt. Da im Mobil- und Datenfunk die Kohärenzzeit bei einigen Hertz liegt, also der Kanal gegenüber der Datenrate wenig veränderlich ist, sind die Voraussetzungen sicher gegeben. Ein Vergleich mit schnell variierenden Prozessen findet sich in [**?**]. Erst dann zeigen sich signifikante Unterschiede.

Darüber hinaus sind die spektralen Eigenschaften der parametrisierenden Prozesse, die in Kap. **??** beschrieben wurden, von großer Bedeutung. Zur Modellierung von Fadingprozessen mit dem klassischen Doppler-Spektrum ist es sicherlich wünschenswert, daß die spektralen Eigenschaften auch für Zustandsmodelle erhalten bleiben. Da die Pegelkreuzungsraten nicht den genauen Verlauf des Spektrums erfassen, sondern lediglich das Integral über das Spektrum, vgl. Kap. **??**, kann mit dem LCR-Modell, wie auch simulative Untersuchungen zeigen, kein Prozeß mit klassischem Doppler-Spektrum erzeugt werden. Dies wird erst möglich, wenn dem Verlauf der Autokorrelation angepaßte Modelle erstellt werden. Dabei werden stets konkrete Prozesse zur Parametrisierung verwendet, deren Parameterschätzung auf Gl. **??**, bzw. Modifikationen von Gl. **??** beruht.

3.1.5 Nutzung spezieller Eigenschaften von Markov-Ketten für die Modellierung des Funkkanals

3.1.5.1 Stationäre Wahrscheinlichkeit

Mit der schon berechneten stationären Wahrscheinlichkeit, Gl. **??**, $\underline{\gamma}^T = \underline{\gamma}^T \mathbf{q}$ können einige wichtige weitere Eigenschaften abgeleitet werden. Man beachte, daß für rekurrente, irreduzible Markov-Ketten gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{q}^n = \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \underline{\gamma}^T \\ \underline{\gamma}^T \\ \vdots \\ \underline{\gamma}^T \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

3.1.5.2 Mittelwert

Wird mit $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(1, 2, \ldots, m)$ eine Gewichtung der Zustände hinsichtlich ihrer Einordnung vorgenommen, so läßt sich mit

$$m_J = \sum_{i=1}^{m} i\,\gamma_i = \underline{e}^T\,\mathbf{D}\,\underline{\gamma} \tag{3.37}$$

und $\underline{e}^T = (1, 1, \ldots, 1)$ der mittlere Zustand der Markov-Kette bestimmen.

Mit der Abbildung des jeweiligen Zustandes auf den entsprechenden Wert des Prozesses, die durch die Zuordnung der Zustände zwischen je zwei Schwellen zum Mittelwert der zwei

Schwellen realisiert wird, kann der Mittelwert des nachgebildeten Fadingprozesses $\{\tilde{J}(t)\}$ berechnet werden

$$m_{\tilde{J}} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b_i = \underline{e}^T \mathbf{B} \underline{\gamma}, \tag{3.38}$$

mit $\mathbf{B} = \mathbf{diag}(b_1, b_2, \ldots b_m)$. Dabei wird die oben geschilderte Abbildung bei linearer Anordnung der Schwellen berechnet durch

$$b_i = \frac{(A_{i+1} + A_i)}{2}. \tag{3.39}$$

Für den 1. und m-ten Zustand lassen sich keine Abbildungen herleiten. Wir wählen

$$b_1 = A_2/2, \qquad b_m = \frac{3}{2} A_m - A_{m-1}/2. \tag{3.40}$$

Offensichtlich gilt dann $\tilde{\mathbb{E}} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

3.1.5.3 Globale Korrelation

Die Autokorrelation (AKF) des Prozesses $\{J(t)\}$ im Abstand k kann durch

$$C_{JJ}(k) = \mathbf{E}\left[(J(l) - \mathbf{E}[J(l)])\,(J(l+k) - \mathbf{E}[J(l+k)])\right] \tag{3.41}$$

berechnet werden. Da $\{J(t)\}$ als ergodisch angenommen wurde, gilt

$$C_{JJ}(k) = \sum_{i \in \mathbb{E}} \sum_{j \in \mathbb{E}} i\,j\ Pr\{J(t) = i,\ J(t+k) = j\} - (\mathbf{E}J(l))^2\,. \tag{3.42}$$

Mit $\mathbf{p}_0 = \mathbf{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ als Anfangsverteilung erhalten wir in Matrixnotation

$$C_{JJ}(k) = \underline{e}^T \mathbf{D}\,\mathbf{p}_0\ \mathbf{q}^k\ \mathbf{D}\,\underline{e} - \underline{e}^T \mathbf{D}\,\underline{\gamma}\,\underline{\gamma}^T\,\mathbf{D}\,\underline{e}, \tag{3.43}$$

mit $\underline{e}^T = (1, 1, \ldots, 1)$ und $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(1, 2, \ldots m)$. Wählen wir als Anfangsverteilung $\mathbf{p}_0 = \mathbf{diag}(\underline{\gamma})$, dann erhalten wir $\lim_{k\to\infty} C_{JJ}(k) = 0$.

Es folgt ein Beispiel mit $m = 4$ Zuständen. Wir berechnen die Übergangswahrscheinlichkeiten nach Gl. **??** mit $F(\cdot)$ vom Type Rayleigh mit Mittelwert $\rho = 9dB$ und $f_d/R_t = 0.002$. Es wurde DPSK-Modulation gewählt und für die Abbildung
$i \to f(i) = 0.13 + 0.18 \cdot i$ mit $i \in \mathbb{E}$, die die dem Zustand zugeordnete Leistung, bzw. das Signal-zu-Stör-Leistungsverhältnis (SNR) ergibt. Die AKF wurde nach Gl. **??** berechnet. Dies kann zur Validierung mit Ergebnissen, die mit stochastischer Simulation gewonnen wurden, verglichen werden. Abb. **??** zeigt beide Ergebnisse. Stochastische Simulation und analytische Berechnung liefern übereinstimmende Resultate.

Abb. **??** zeigt die normierte AKF für unterschiedliche Anzahl m der Zustände. Je weniger Zustände vorliegen, desto dominanter ist die Diagonale, da Zustandswechsel weniger häufig vorkommen. Dies sollte zu einer stärkeren Korrelation führen. Ein gegenläufiger Effekt liegt in der geringeren Unterteilung des gesamten Zustandsraumes, so daß, wenn dann eine Zustandsänderung stattfindet, diese eine viel stärkere Änderung der den Zuständen

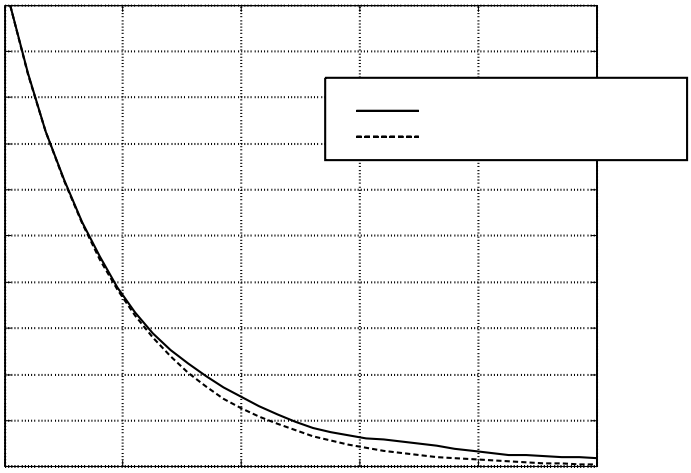

Abb. 3.5 AKF einer Realisierung eines Zustandsprozesses, Anzahl der Zustände $m = 4$

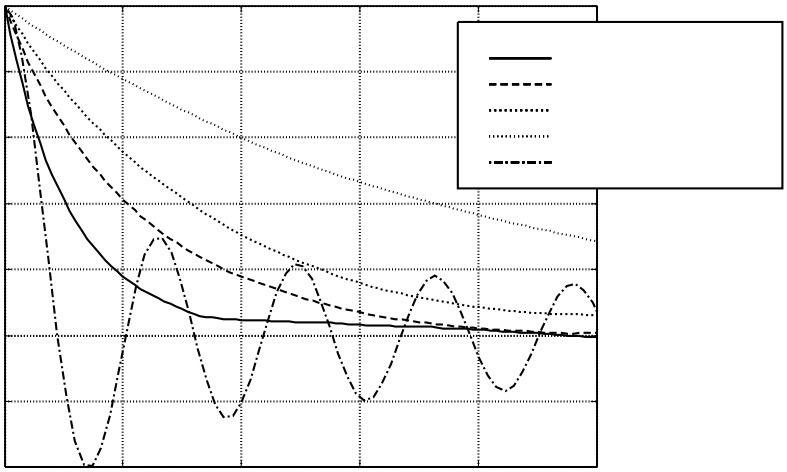

Abb. 3.6 AKF von Zustandsprozessen, Anzahl der Zustände $m = 4..32$

zugeordneten Werte des Prozesses zur Folge hat. Deshalb stellt sich mit abnehmender Anzahl von Zuständen eine abnehmende Korrelation ein. Weiterhin ist die Bessel-Funktion $J_0(\cdot)$ dargestellt, die sich ergibt, wenn die Funkwellen aus allen Richtungen gleichverteilt einfallen. Sie ist die inverse Fouriertransformierte des klassischen Doppler-Spektrums.

Der Verlauf der AKF wird also durch $\mathbf{q}^k, k = 1, 2, ...$ bestimmt. Dieser Ausdruck kann durch Eigenwerte charakterisiert werden. Im nächsten Kapitel werden theoretische Untersuchungen dazu vorgenommen.

3.1.5.4 Spektrale Eigenschaften

Ist $\mathbf{q}$ regulär, was in der Praxis bei beiden bisher vorgestellten Verfahren (Parametrisierung nach der LCR-Methode bzw. durch Schätzen der Parameter eines Musterprozesses) der Fall ist, gilt $\mathbf{q}^k = \mathbf{U}\,\mathbf{\Psi}^k\,\mathbf{U^{-1}}$, wobei $\mathbf{U}$ die Matrix mit den Eigenvektoren (EVn) darstellt, s. Anhang Satz 1,2... Die EVn von $\mathbf{q}$ sind bestimmt durch

$$\mathbf{q}\ \underline{u}_k \ = \ \psi_k\ \underline{u}_k. \tag{3.44}$$

Diese EVn werden *rechtsseitig* genannt. Die *linksseitigen* EVn erhält man durch

$$\underline{y}_k{}^T\,\mathbf{q} \ = \ \psi_k\ \underline{y}_k{}^T. \tag{3.45}$$

Rechts- und linksseitige EVn können je zu Matrizen zusammengefaßt werden, so daß gilt

$$\mathbf{U} \ = \ (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m) \ = \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i\ \underline{e}_i{}^T \ = \ \mathbf{Y^{-1}} \tag{3.46}$$

$$\mathbf{Y} \ = \ \begin{pmatrix} \underline{y}_1{}^T \\ \underline{y}_2{}^T \\ \vdots \\ \underline{y}_m{}^T \end{pmatrix} \ = \sum_{j=1}^{m} \underline{e}_j\ \underline{y}_j{}^T, \tag{3.47}$$

dabei sind $\underline{e}_{i\in\mathbb{E}}$ die Einheitsvektoren mit $\underline{e}_i = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_j,\ \ldots,\ e_m)^T,\ e_j = 1$, für $i = j$ mit $i, j \in \mathbb{E}$ und $e_j = 0$ sonst.

In [**?**] p. 86 - 111 wurde eine Charakterisierung nicht negativer Matrizen über Eigenwerte vorgenommen; Jakobi-, bzw. Jakobi-ähnliche Matrizen wurden jedoch nicht behandelt. In [**?**] wird das Spektrum von codierten Sequenzen bestimmt, die mit Markov-Ketten modelliert werden. Diese Thematik wird auch *Spektralzerlegung* genannt, wobei der Zusammenhang zum *Spektrum* bei Markov-Prozessen sicher zufällig ist.

Der Verlauf der AKF wird also über die Zerlegung

$$\mathbf{q}^k \ = \ \mathbf{U}\ \mathbf{diag}(\psi_1{}^k, \ldots, \psi_m{}^k)\,\mathbf{U^{-1}} \ = \ \mathbf{U}\,\mathbf{\Psi}^k\,\mathbf{U^{-1}} \tag{3.48}$$

untersucht.

3.1.5.5 Mathematische Eigenschaften von stochastischen Matrizen

Zur Beurteilung von Jakobi- bzw. Jakobi-ähnlichen Matrizen sind folgende mathematische Zusammenhänge wichtig.

Hilfssatz 1: Seien $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$ rechtseitige EVn und $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_m$ linksseitige EVn einer diagonalisierbaren Matrix. Ist $\underline{u}_k$ ein rechtsseitiger und $\underline{y}_k$ ein linksseitiger EV zu dem gleichen EW einer Matrix, gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{u}_k\,\underline{y}_k{}^T \ = \ \mathbf{I}. \tag{3.49}$$

□

Beweis: Da $\mathbf{U} = \mathbf{Y^{-1}}$ gilt, folgt

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}\,\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i\, \underline{e}_i{}^T \sum_{j=1}^{m} \underline{e}_j\, \underline{y}_j{}^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i\, \underline{e}_i{}^T\, \underline{e}_i\, \underline{y}_i{}^T + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \underline{u}_i\, \underline{e}_i{}^T\, \underline{e}_j\, \underline{y}_j{}^T = \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i\, \underline{y}_i{}^T. \tag{3.50}$$

□

Hilfssatz 2: Ist $\underline{u}_k$ ein rechtsseitiger und $\underline{y}_k$ ein linksseitiger EV zu dem gleichen EW einer stochastischen diagonalisierbaren Matrix $\mathbf{q}$ und $\underline{\gamma}$ der stationäre Wahrscheinlichkeitsvektor von $\mathbf{q}$ mit $\underline{\gamma}^T = \underline{\gamma}^T\,\mathbf{q}$, dann gilt mit $\underline{e} = (1, 1, \ldots, 1)^T$

$$\underline{\gamma}^T\, \underline{u}_k\, \underline{y}_k{}^T\, \underline{e} = \begin{cases} 0 \text{ für } |\psi_k| < 1 \\ 1 \text{ für } |\psi_k| = 1. \end{cases} \tag{3.51}$$

□

Beweis: Bei stochastischen Matrizen existiert ein maximaler EW mit der Vielfachheit Eins. Nach dem Satz von PERRON hat dieser EW den Wert Eins, s. Anhang Satz 6, 7, 8. Aus der Definition der EWe folgt

$$\psi_k{}^{2n}\, \underline{\gamma}^T\, \underline{u}_k\, \underline{y}_k{}^T\, \underline{e} = \underline{\gamma}^T\, \mathbf{q}^n\, \underline{u}_k\, \underline{y}_k{}^T\, \mathbf{q}^n\, \underline{e} \quad \text{für alle } k = 1..m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.52}$$

Wird der Grenzübergang $lim_{n\to\infty}$ vorgenommen, folgt für $|\psi_k| < 1$ mit $\underline{\gamma}^T\,\mathbf{\Gamma} = \underline{\gamma}^T$ und $\mathbf{\Gamma}\,\underline{e} = \underline{e}$ die Behauptung direkt, mit Hilfssatz 1 die Behauptung für $\psi_k = 1$. □

Hilfssatz 3: Seien $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$ rechtseitige EVn und $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_m$ linksseitige EVn einer diagonalisierbaren Matrix und sei $\underline{v}$ ein beliebiger Vektor der Länge m, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{v}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{u}_k\, \underline{y}_k{}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e} = \sum_{k=1}^{m} v_k\, a_k{}^2. \tag{3.53}$$

□

Beweis: Da $\mathbf{U} = \mathbf{Y^{-1}}$ gilt, folgt

$$\sum_{k=1}^{m} v_k\, a_k{}^2 = \underline{v}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e} = \underline{v}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \mathbf{U}\, \mathbf{Y}\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e} = \tag{3.54}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underline{v}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{u}_i\, \underline{e}_i{}^T \sum_{j=1}^{m} \underline{e}_j\, \underline{y}_j{}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e} = \sum_{i=1}^{m} \underline{v}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{u}_i\, \underline{y}_i{}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e}. \tag{3.55}$$

Der Beweisgang ist analog zu Hilfssatz 1. □

Hilfssatz 4: Seien $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$ rechtseitige EVn und $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_m$ linksseitige EVn einer diagonalisierbaren Matrix, dann gilt für k mit $\psi_k = 1$

$$\underline{\gamma}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{u}_k\, \underline{y}_k{}^T\, \mathbf{diag}(\underline{a})\, \underline{e} = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_i\, a_i \right)^2. \tag{3.56}$$

□

Beweis: Aus der Definition der Eigenwerte folgt

$$\psi_k^{2n}\ \underline{\gamma}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{e}\ =\ \underline{\gamma}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\ \mathbf{q}^n\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\ \mathbf{q}^n\ \mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{e}. \tag{3.57}$$

Wird der Grenzübergang $\lim_{n\to\infty}$ vorgenommen, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\ \psi_k^{2n}\ \underline{\gamma}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{e}\ =\ \underline{\gamma}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a})\ \mathbf{\Gamma}\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\ \mathbf{\Gamma}\ \mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{e}\ =$$

$$=\ \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,a_i\ \tilde{\gamma}^T\ \mathbf{\Gamma}\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\ \mathbf{\Gamma}\ \mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{e}\ =\ \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,a_i\ \underline{\gamma}^T\ \underline{u}_k\ \underline{y}_k{}^T\ \underline{e},\ \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,a_i, \tag{3.58}$$

da gilt $\tilde{\gamma}^T\,\mathbf{\Gamma}\ =\ \underline{\gamma}^T$ und $\mathbf{\Gamma}\ \mathbf{diag}(\underline{a})\ =\ \mathbf{\Gamma}\,\underline{a} = \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,a_i\,\underline{e}$. Es folgt mit $\psi_k = 1$ sowie Hilfssatz 2 die Behauptung. □

Satz 3: Besitzt eine stochastische Matrix $\mathbf{q}$ m linear unabhängige EVn, so ist der Verlauf der Autokorrelation nach Gl. **??** des zugehörigen Markov-Prozesses durch ψ_k, $\underline{u}_k$ und $\underline{y}_k{}^T$ für $k = 1..m-1$ vollständig bestimmt, falls $\psi_k < \psi_m$ für $k = 1..m-1$. □

Beweis: Sind die m EVn $\underline{u}_{k,\,k=1..m}$ linear unabhängig, so ist $\mathbf{q}$ diagonalisierbar, s. Anh. Satz 3 und 4. Ist $\mathbf{q}$ stochastisch, so ist der maximale EW identisch Eins. Da alle $\psi_k < \psi_m = 1$, sind nur die nicht zu dem maximalen EW gehörigen EVn zu untersuchen. Nach Hilfsatz 4 kompensiert der zu dem maximalen EW gehörige Term $\underline{u}_m\,\underline{y}_m{}^T$ den zweiten Term in Gl. **??**, also den Gleichanteil. □

So ist es nicht möglich, einen streng mathematischen Beweis zu formulieren, daß die AKF bei $0 \le \psi_i \le 1$ für Jakobi- bzw. Jakobi-ähnliche Matrizen stets streng monoton fallend ist. Nach Hilfsatz 3 sind Aussagen über alle Summenteile möglich, nach Hilfsatz 4 über den zu dem maximalen EW gehörigen Term und nach Hilfsatz 2 über die nicht transformierten $\underline{u}_k\,\underline{y}_k{}^T$. Für die Terme $\mathbf{diag}(\underline{a})\,\underline{u}_k\,\underline{y}_k{}^T\,\mathbf{diag}(\underline{a}), k < m$ lassen sich m.E. für beliebige $\underline{a}$ keine Eigenschaften angeben, d.h. Hilfssatz 4 läßt sich nicht auf die anderen Summenglieder ausweiten, was die Voraussetzung für das streng monotone Verhalten der AKF ist. Ähnlich wie in Kap. **??** bezüglich der EWe ist auch hier im konkreten Fall eine explizite Untersuchung der Summenglieder notwendig.

Es soll noch bemerkt werden, daß der stationäre Wahrscheinlichkeitsvektor einer stochastischen Matrix der linksseitige EV zu dem maximalen EW ist.

Im folgenden sind zur Illustration die Matrizen, EWe und EVn für $m = 4$ und $m = 8$ für das LCR-Modell eines Rayleigh-Prozesses mit $f_d\,T = 0.0018$ dargestellt.

$$\mathbf{q}_4\ =\ \begin{pmatrix} 0.98769 & 0.01232 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00354 & 0.99164 & 0.00481 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00577 & 0.99105 & 0.00317 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00598 & 0.99402 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4) &= (.98131, .98786, .99518, 1.0) \\ \underline{u}_1 &= (-.83796, .43067, -.30312, .14306)^T \\ \underline{u}_2 &= (.76802, .01094, -.57429, .55719)^T \\ \underline{u}_3 &= (-.83796, .43064, -.30312, .14306)^T \\ \underline{u}_4 &= (.00354, .99164, .00481, 0.0)^T \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{q}_8 = \begin{pmatrix} 0.98132 & 0.01867 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00585 & 0.98384 & 0.01030 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00780 & 0.98373 & 0.00847 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00901 & 0.98356 & 0.00743 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.01000 & 0.98334 & 0.00666 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.01093 & 0.98305 & 0.00602 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.01182 & 0.98271 & 0.00546 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00837 & 0.99163 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= .97516, \quad \underline{u}_1 = (.56671, -.18691, -.16464, .33858, -.18302, -.28424, .70458, -.35821)^T, \\
\psi_2 &= .99748, \quad \underline{u}_2 = (.29904, .25872, .17255, .04191, -.13064, -.34055, -.57912, -.82831)^T, \\
\psi_3 &= .99380, \quad \underline{u}_3 = (.46205, .30883, .03610, -.24138, -.37658, -.22946, .27361, 1.05172)^T, \\
\psi_4 &= .96986, \quad \underline{u}_4 = (-.50619, .31047, -.13333, -.06766, .28631, -.47732, .52540, -.20212)^T, \\
\psi_5 &= .98169, \quad \underline{u}_5 = (-.60063, -.01195, .34381, -.071563, -.39882, .20574, .67760, -.57102)^T, \\
\psi_6 &= .96687, \quad \underline{u}_6 = (-.50496, .39075, -.35656, .34985, -.35358, .34829, -.29427, .09950)^T, \\
\psi_7 &= .98830, \quad \underline{u}_7 = (.49458, .18459, -.20127, -.27840, .06665, .46805, .28665, -.71962)^T, \\
\psi_8 &= 1.0, \quad \underline{u}_8 = (.36014, .36014, .36012, .36012, .36013, .36011, .36009, .36008)^T.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

3.1.5.6 Verlauf des Spektrums

Dem genaueren Verlauf des Spektrums soll im folgenden das Augenmerk gelten. Das Spektrum $S_{JJ}(f)$ ergibt sich als Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion

$$S_{JJ}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{JJ}(n) \exp\{-\jmath 2\pi f n T\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i\in\mathbb{E}} \sum_{j\in\mathbb{E}} \left((\mathbf{D}\,\mathbf{p}_0\,\mathbf{q}^n\,\mathbf{D})_{ij} - (\mathbf{D}\,\underline{\gamma}\,\underline{\gamma}^T\,\mathbf{D})_{ij} \right) \exp\{-\jmath 2\pi f n T\}. \tag{3.63}$$

Nach Hilfssatz 4 kompensiert der zum maximalen EW gehörige Term das rechte Glied in Gl. **??**. Wird nur der erste, nicht konstante Anteil betrachtet, ergibt sich mit der Annahme $\underline{e}^T\,\mathbf{p}_0 = \underline{\gamma}^T$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{JJ}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i\in\mathbb{E}} \sum_{j\in\mathbb{E}} d_{ii}\,\gamma_i\,(\mathbf{q}^n)_{ij}\,d_{jj}\,\exp\{-\jmath 2\pi f n T\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i\in\mathbb{E}} \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathbb{E}} \sum_{l\in\mathbb{E}} d_{ii}\,\gamma_i\,u_{ik}\,\psi_{kl}^n\,\hat{u}_{lj}\,d_{jj}\,\exp\{-\jmath 2\pi f n T\}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Die Elemente der Matrix, die die EWe enthalten, sind bis auf die EWe selbst identisch Null. Nun betrachten wir nur die nach Satz 3 relevanten EWe. Also folgt

$$\begin{aligned}
S_{JJ}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i\in\mathbb{E}} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l\in\mathbb{E}} d_{ii}\,\gamma_i\,u_{ik}\,\psi_{kk}^n\,\hat{u}_{kl}\,d_{ll}\,\exp\{-\jmath 2\pi f n T\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{E}} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l\in\mathbb{E}} d_{ii}\,\gamma_i\,u_{ik}\,u_{kl}\,d_{ll}\,(Z_{-n} + Z_0 + Z_n)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

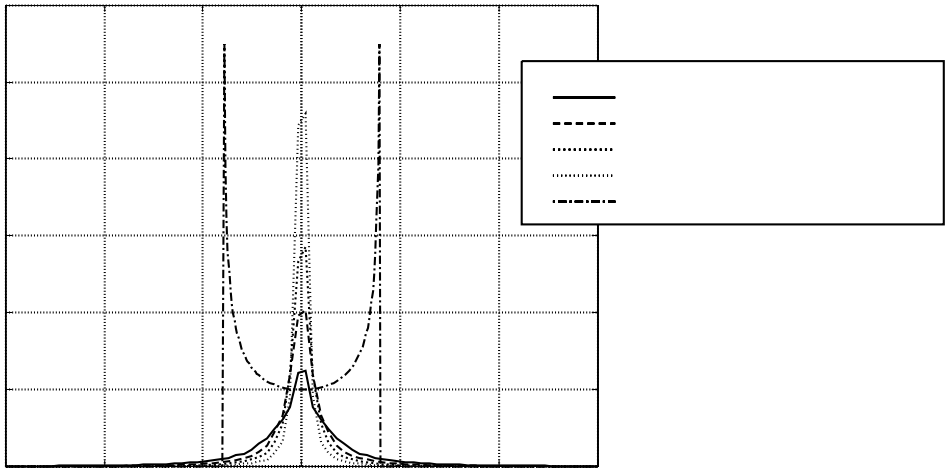

Abb. 3.7 Spektren von Markov-Modellen, die nach LCRn parametrisiert werden

mit

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{kk}^n \ \exp\{-\jmath 2\pi f n T\} \ = \ \frac{\psi_{kk} \ \exp\{-\jmath 2\pi f T\}}{1 \ - \ \exp\{-\jmath 2\pi f T\}}, \\ Z_0 &= \psi_{kk}^0 \ \exp\{-\jmath 2\pi f \, 0 \, T\} \ = \ 1, \\ Z_{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{1} \psi_{kk}^n \ \exp\{-\jmath 2\pi f n T\} \ = \ \frac{\psi_{kk} \ \exp\{+\jmath 2\pi f T\}}{1 \ - \ \exp\{+\jmath 2\pi f T\}}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

da die Autokorrelationsfunktion sich nach einfachen Markov-theoretischen Überlegungen als gerade Funktion erweist. Nach einigen Rechnungen folgt

$$S_{JJ}(f) \ = \ \sum_{i \in \mathbb{E}} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l \in \mathbb{E}} \ \frac{1 \ - \ {\psi_{kk}}^2}{1 \ + \ {\psi_{kk}}^2 \ - \ 2 \, \psi_{kk} \ \cos(2 \, \pi \, f T)}. \tag{3.67}$$

Damit ist gezeigt, daß die Autokorrelationsfunktion eines Markov-Prozesses eine Überlagerung von Exponentialfunktionen darstellt und das Spektrum die entsprechende Fouriertransformierte ist.

In gleicher Weise kann die Korrelation $C_{\tilde{J}\tilde{J}}(\cdot)$ und das zugehörige Spektrum $S_{\tilde{J}\tilde{J}}(\cdot)$ für den Kanalprozeß $\{\tilde{J}(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ berechnet werden, wenn statt der Abbildung durch die Matrix **D** nun **B** verwendet wird.

Abb. **??** zeigt die Spektren für Zustandsmodelle, die nach Pegelkreuzungsraten parametrisiert wurden. Der Unterschied zum klassischen U-förmigen Doppler-Spektrum ist deutlich.

Die Struktur der Matrix **q**, insbesondere die starke Diagonale, ist für den Verlauf der AKF bzw. des Spektrums verantwortlich. In späteren Kapiteln wird deshalb eine völlig andere Struktur etabliert, um das klassische Doppler-Spektrum zu approximieren. Es wird sich zeigen, daß dann auch der Fehlerprozeß besser nachgebildet werden kann.

3.1.5.7 Verteilungsdichtefunktion der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Intervalle

Die VDF der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Intervalle wird auch VDF der Nonfading- bzw. Fading-Intervalle genannt. In [?] Kap. 5 wird behauptet, daß allg. Lösungen für Rayleigh, Rice und Suzuki-Prozesse nicht bekannt sind. Approximativ werden sie jedoch in [?, ?] für Gauß- und Rayleigh-Prozesse berechnet[11].

Aus der Pegelkreuzungsrate $N_l(\cdot)$ lassen sich die Mittelwerte der normierten Fading- und Verbindungsintervalle bestimmen. Die in [?] berechneten Mittelwerte der Fading- und Verbindungsintervalle ergeben sich aus dem Kehrwert von $N_l(R)$, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit $P(R)_x, x \in \{+,-\}$, daß der Wert größer oder kleiner als R ist. $P_-(R) = F(R)$ bzw. $P_+ = 1 - P_-(R)$ ergeben sich aus der stationären VFn. Für einen Rayleigh-Prozeß $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}_0^+\}$ ist der Mittelwert der Fadingintervallänge τ_-:

$$\mathbf{E}\,[\,\tau_-\,] \;=\; \frac{P_-(R)}{N_\xi(R)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\frac{\psi_0}{R}\left[\exp\left\{\frac{R^2}{2\psi_0}\right\} - 1\right]$$

und die Verbindungsintervallänge τ_+:

$$\mathbf{E}\,[\,\tau_+\,] \;=\; \frac{P_+(R)}{N_\xi(R)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\frac{\psi_0}{R}$$

Dabei wurde zur Normierung auf die Doppler-Frequenz $\tau = 2\pi\, f_d\, \theta$ gesetzt.

Im folgenden soll die VDF der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Intervalle für Markov-Ketten hergeleitet werden.

Die Zeit, die eine eindimensionale Markov-Kette zwischen zwei Besuchen eines Zustands in anderen Zuständen verbringt, wird in [?] als Erstbesuchszeit bezeichnet. Zunächst soll diese Erstbesuchszeit hergeleitet werden, wobei eine Einschränkung vorgenommen werden muß.

Nach Zurücklegen eines Pfades durch Zustände einer Markov-Kette, ausgehend von einem ausgezeichneten Zustand, wird dieser genau dann mit Wahrscheinlichkeit Eins erreicht, wenn die beschreibende Matrix rekurrent ist. Bei einer eindimensionalen Markov-Kette, für die nur Übergänge zu Nachbarzuständen mit von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit definiert sind, wird die Zeit zwischen zwei Besuchen eines Zustands entweder in Zuständen oberhalb oder unterhalb des betreffenden Zustands verbracht. Dann ist ein Überspringen des ausgezeichneten Zustands nicht möglich. In diesem Fall ist die Erstbesuchszeit identisch mit der Verbindungs- bzw. Nichtverbindungsdauer bezüglich der darüber liegenden Schwelle, oder im zweiten Fall, der darunterliegenden Schwelle.

Sei k der ausgezeichnete Zustand. Es soll nun also die VDF der Erstbesuchszeit unter der Bedingung bestimmt werden, daß in der Zwischenzeit nur Zustände oberhalb $k \in \mathbb{E}$ belegt werden. Die Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung ist demnach $\underline{a} = (a_{i\in\mathbb{E}})$ mit

$$a_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k, \quad i,k \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.68}$$

[11] Zu dieser Thematik wurde schon sehr viel publiziert, einen guten Überblick gibt [?].

Die Wahrscheinlichkeit von Zustand k in einen anderen zu wechseln wird durch $\underline{a}\,\mathbf{q}$ beschrieben. Es sind nun jedoch nicht alle Übergänge zulässig. Die Übergänge, die zu Zuständen oberhalb des ausgezeichneten Zustands führen, müssen selektiert werden. Durch
$\mathbf{C}_k = \mathbf{diag}\,(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ mit

$$c_i = \begin{cases} 0 & i \leq k \\ 1 & i > k, \quad i,k \in \mathbb{E} \end{cases} \tag{3.69}$$

läßt sich dies realisieren. Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\,\mathbf{C}_k &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3m} \\ q_{41} & q_{42} & \cdots & q_{4m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & q_{1,k+1} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & q_{k,k+1} & \cdots & q_{k,m} \\ 0 & \ldots & 0 & q_{k+1,k+1} & \cdots & q_{k+1,m} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & q_{k+1,m} & \cdots & q_{m,m} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.70}$$

sind alle Wahrscheinlichkeiten für nicht erlaubte Übergänge identisch Null. Nach n Übergängen kann der Systemzustand mit

$$\underline{a} \prod_{l=1}^{n} \mathbf{q}\,\mathbf{C}_k \tag{3.71}$$

beschrieben werden. Dies ist ein Vektor, bei dem nur die Elemente positiv sind, deren Index größer als k ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kette dann wieder den ausgezeichneten Zustand erreicht, entspricht einer weiteren Multiplikation mit $\mathbf{q}$ in Verbindung mit einem Zielvektor $\underline{z}$. Dieser Zielvektor beschreibt wieder den ausgezeichneten Zustand und ist dem initialen Vektor $\underline{a}$ identisch. In Abb. **??** ist die Vorgehensweise skizziert. Die Tatsache, daß nur Zustände mit Indizes besucht werden, die größer als der des ausgezeichneten Zustands sind, läßt sich als *Verbindungs*-Zeit L interpretieren. Es ergibt sich damit für die VDF des Verbindungs-Intervalls

$$\begin{aligned} &Pr\{J(n) = k, J(n+1) > k, J(n+2) > k, \ldots, J(n+l-1) > k, J(n+l) = k\} = \\ &\quad = Pr\{L = l\} = \underline{a}\ \{\ \mathbf{q}\,\mathbf{C}_k\ \}^{l-1}\ \mathbf{q}\,\underline{z}, \qquad l \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

dabei muß die Endverteilung $\underline{z} = (z_{i \in \mathbb{E}})$ mit

$$z_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k, \quad i,k \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.73}$$

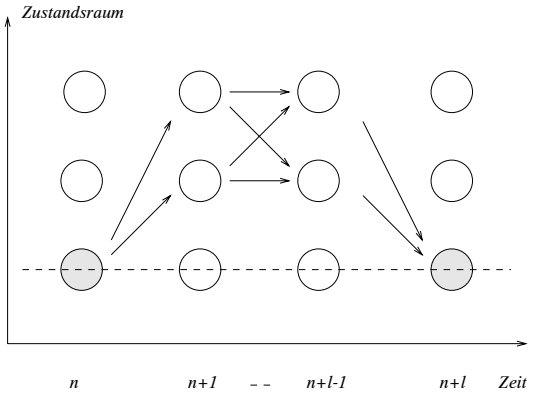

Abb. 3.8 Skizze des Rechenganges

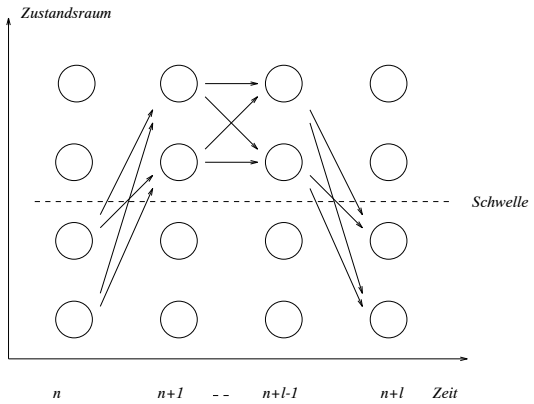

Abb. 3.9 Skizze des Rechenganges

gewählt werden.

Beispiel: Gilt $m = 3$ und $k = 3$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß $1, 2$ bzw. 3 Übergänge über die Zustände 1 und 2 stattfinden

$$\begin{aligned} Pr\{L=1\} &= q_{3,3} \\ Pr\{L=2\} &= q_{3,1}\, q_{1,3} \;+\; q_{3,2}\, q_{2,3} \\ Pr\{L=3\} &= q_{3,1}\, q_{1,1}\, q_{1,3} \;+\; q_{3,2}\, q_{2,2}\, q_{2,3} + q_{3,1}\, q_{1,2}\, q_{2,3} \;+\; q_{3,2}\, q_{2,1}\, q_{1,3}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Wird statt $\mathbf{C}$ die Matrix $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{G} = \mathbf{diag}\,(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ mit

$$g_i = \begin{cases} 0 & i \geq k \\ 1 & i < k, \quad i,k \in \mathbb{E} \end{cases} \tag{3.75}$$

benutzt, läßt sich in gleicher Weise die VDF der Erstbesuchszeit unter der Bedingung berechnen, daß in der Zwischenzeit nur Zustände besucht werden, die einen kleineren Index als der ausgezeichnete Zustand tragen.

Diese Gleichungen entsprechen für Jakobi-Matrizen den Verbindungs- bzw. Nichtverbindungs-Intervallen. Werden allgemeine Matrizen zur Parametrisierung verwendet, muß explizit die entsprechende Schwelle betrachtet werden. Abb. **??** zeigt das Prinzip. Die Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung ist demnach $\underline{\hat{a}} = (\hat{a}_{i\in\mathbb{E}})$ mit

$$\hat{a}_i = \begin{cases} \gamma_i / \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i & i < k \\ 0 & i \geq k, \quad i,k \in \mathbb{E}, \end{cases} \tag{3.76}$$

dabei ergibt sich die Summe im Nenner aus Normierungsgründen. Die Endverteilung $\underline{\hat{z}} = (\hat{z}_{i\in\mathbb{E}})$ muß mit

$$\hat{z}_i = \begin{cases} 1 & i < k \\ 0 & i \geq k, \quad i,k \in \mathbb{E} \end{cases} \tag{3.77}$$

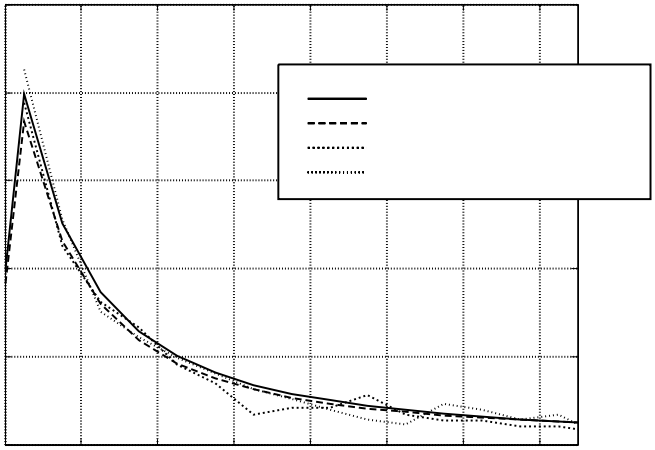

Abb. 3.10 Verbindungsdauer eines Markov-Prozesses

gewählt werden und c_i hat die Form

$$c_i = \begin{cases} 0 & i < k \\ 1 & i \geq k, \quad i,k \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.78}$$

Dann ergibt sich für die Verbindungsdauern

$$Pr\{J(n) < k, J(n+1) \geq k, J(n+2) \geq k, \ldots, J(n+l-1) \geq k, J(n+l) < k\} = \\ = \underline{\hat{a}} \ \{ \mathbf{q}\,\mathbf{C}_k \}^{l-1} \ \mathbf{q}\,\underline{\hat{z}}, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{3.79}$$

Die Fadingdauern lassen sich analog berechnen. $\underline{\hat{a}}$ und $\underline{\hat{z}}$ müssen entsprechend modifiziert werden mit

$$\hat{a}_i = \begin{cases} \gamma_i / \sum_{i=k}^{m} \gamma_i & i \geq k \\ 0 & i < k, \quad i,k \in \mathbb{E}, \end{cases} \qquad \hat{z}_i = \begin{cases} 1 & i \geq k \\ 0 & i < k, \quad i,k \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{3.80}$$

Abb. **??** zeigt die VDF der Verbindungs- und Nichtverbindungsdauern eines Markov-Prozesses im Vergleich. Es wurden Gauß-Prozesse mit $m = 11$ und Schwellen um den Nullpunkt gewählt. Stochastische Simulation und analytische Berechnung stimmen gut überein.

3.1.5.8 Korrelation der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Dauern

Die Korrelation der Verbindungs- und Nichtverbindungs-Dauern im Abstand k kann durch

$$C_{LL}(k) = \mathbf{E}\left[(L_{\uparrow n} - \mathbf{E}[L_{\uparrow n}]) \ (L_{\uparrow n+k} - \mathbf{E}[L_{\uparrow n+k}]) \right] \tag{3.81}$$

berechnet werden. Dabei bezeichnet $L_\uparrow$ eine Verbindungsdauer der Länge L.

Stochastische Simulationen und analytische Untersuchungen ergeben, daß bei den für Szenarien, wie z.B. das GSM, spezifizierten Funkkanälen diese Korrelationen in Bereichen der Schätz- bzw. Rechengenauigkeit liegen, s. [**?**]. Gleiches gilt für die Nichtverbindungsdauer $L\downarrow$ und die jeweiligen Kreuzkorrelationen.

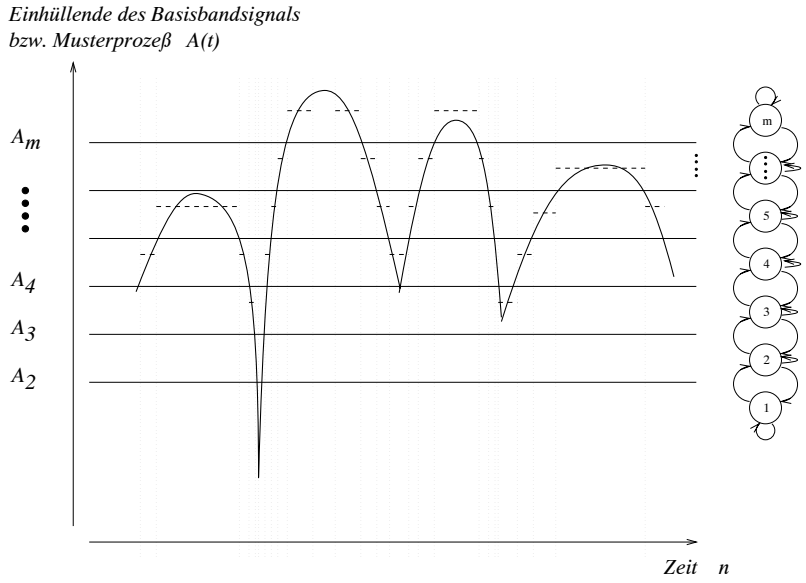

Abb. 3.11 Quantisierung des Prozesses

3.1.6 Semi-Markov-Prozesse zur Modellierung des Funkkanals

Die Verweilzeit für zeitdiskrete Markov-Ketten innerhalb eines Zustands ist geometrisch verteilt. Es gilt für die Zeit, während der sich die Kette im Zustand i befindet, unter der Bedingung, daß sie dann nach j wechselt

$$q_{i,j}(k) = {q_{i,i}}^{(k-1)}\, q_{i,j} \qquad k \in \mathbb{N},\, i,j \in \mathbb{E}. \tag{3.82}$$

Die Annahme einer geometrisch verteilten Verweilzeit modelliert den Musterprozeß nicht ausreichend, vgl. Abb. **??**. Die durch punktierte Linien skizzierten Verweilzeiten müssen nicht notwendig geometrisch verteilt sein. Deshalb soll die Eignung von semi-Markov-Prozessen untersucht werden.

Nach [**?**] und [**?**] wird ein stochastischer Prozeß $\{Y(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ als homogener zeitdiskreter semi-Markov-Prozeß (SMP) bezeichnet, falls die VDFn der Verweilzeiten

$$q_{i,j}(k) = \Pr\{Y(T_{n+1}) = j,\, T_{n+1} - T_n = k \,|\, Y(T_n) = i\} \tag{3.83}$$

unabhängig von n sind. Dabei bezeichnen $T_n, n \in \mathbb{N}_0$ die Zeitpunkte der Zustandsübergänge.

Die formale Definition nutzt den Begriff des Markov-Erneuerungs-Prozesses:

Definition 7 *(Markov-Erneuerungs-Prozeß (MEP))*

Ein SP $\{(S_n, T_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt *Markov-Erneuerungs-Prozeß* mit nicht leerem Zustandsraum $\mathbb{E}$, falls gilt

$$\begin{aligned} Pr\{S_{n+1} = i_{n+1},\, T_{n+1} - T_n = k \,|\, S_n = i_n,\, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_1 = i_1,\, S_0 = i_0, \\ T_n,\, T_{n-1}, \ldots, T_1,\, T_0\} \;=\; Pr\{S_{n+1} = i_{n+1},\, T_{n+1} - T_n = k \,|\, S_n = i_n\} \\ i_0, \ldots i_{n+1} \in \mathbb{E},\ \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,\, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

□

Der semi-Markov-Prozeß ist dann eine Erscheinungsform des MEP, wenn der oben definierte Prozeß kontinuierlich indiziert wird[12].

Definition 8 (*semi-Markov-Prozeß (SMP)*)

Der SP $\{Y(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ wird *semi-Markov-Prozeß* genannt, wenn $\{(S_n, T_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ ein MEP ist mit

$$Y(t) = S_n \qquad \text{für} \quad T_n \leq t < T_{n+1} \tag{3.85}$$

□

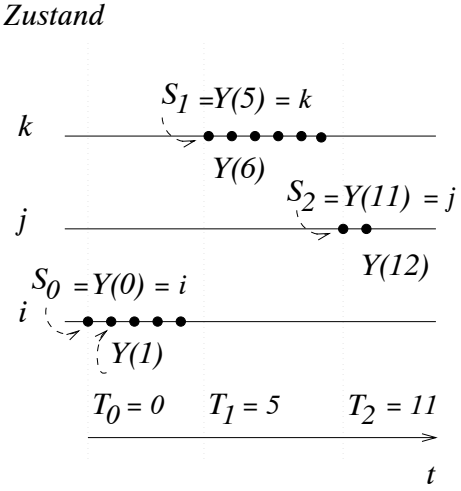

Abb. 3.12 Ausschnitt aus dem SMP

Abb. **??** zeigt beispielhaft den Beginn eines zeitdiskreten semi-Markov-Prozesses mit $\mathbb{E} = \{i, j, k\}$. Die Verweilzeit im Zustand i beträgt 5 diskrete Einheiten. Dann erfolgt ein Übergang zu k. Mit den VFn der Verweilzeiten

$$Q_{i,j}(m) = \sum_{k=1}^{m} q_{i,j}(k) \qquad i, j \in \mathbb{E} \tag{3.86}$$

sind die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette $q_{i,j} = Q_{i,j}(\infty)$. Als semi-Markov-Kern wird die Matrix $\mathbf{q}(k) = (q_{i,j}(k))$ mit $i, j \in \mathbb{E}$ bezeichnet.
Weiterhin definieren wir $\mathbf{Q}(m) = (Q_{i,j\in\mathbb{E}}(m))$ und $\mathbf{q} = (q_{i,j\in\mathbb{E}})$. Mit den mittleren Verweilzeiten

$$m_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in E, i\neq j} k\, q_{i,j}(k) \qquad i \in \mathbb{E} \tag{3.87}$$

und den stationären Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette

$$\underline{\mu}^T = \underline{\mu}^T\, \mathbf{q} \tag{3.88}$$

können die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten β_i der semi-Markov-Kette bestimmt werden

$$\beta_i = \frac{\mu_i\, m_i}{\underline{\mu}^T\, \underline{m}} = \frac{\mu_i\, m_i}{\sum_{j\in\mathbb{E}} \mu_j\, m_j} \qquad i \in \mathbb{E}. \tag{3.89}$$

Satz 4: Sei $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein zeitdiskreter Prozeß auf $\mathbb{E}$ mit nicht konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten $w_{i,j}(\cdot)$ mit $i, j \in \mathbb{E}$. Falls die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von Zustand $X_{n+l} = i$ in Zustand $X_{n+l+1} = j$ durch

$$w_{i,j}(l) = Pr\{X_{n+l+1} = j \mid X_{n+l} = i, \ldots, X_{n+1} = i, X_n \neq i\}, \quad l > 0 \tag{3.90}$$

beschrieben ist, wobei die aktuelle Verweilzeit im Zustand i durch l bezeichnet ist, dann

[12] In [?] werden noch weitere Voraussetzungen genannt: Die Mächtigkeit von $\mathbb{E}$ muß endlich sein oder es muß vorausgesetzt werden, daß die Lebensdauer des MEP gegen Unendlich geht.

existiert ein semi-Markov-Prozeß $\{Y(t),\, t \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\begin{array}{lllll}
Y(T_m) & = Y(n+1) & = X_{n+1} & \text{mit} & X_{n+1} \neq X_n \\
Y(T_m+1) & = Y(n+2) & = X_{n+2} & \text{mit} & X_{n+2} = X_{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
Y(T_{m+1}) & = Y(n+k+1) & = X_{n+k+1} & \text{mit} & X_{n+k+1} \neq X_{n+k} = X_{n+k-1} = \ldots \\
 & & & & \ldots X_{n+2} = X_{n+1}, \qquad k \in \mathbb{N},
\end{array}$$

wobei T_m die Zeitpunkte der Zustandswechsel bezeichnet und es gilt

$$q_{i,j}(k) = \prod_{l=1}^{k-1} w_{i,i}(l)\; w_{i,j}(k) \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.91}$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned}
q_{i,j}(k) &= w_{i,i}(1)\, w_{i,i}(2) \ldots w_{i,i}(k-1)\, w_{i,j}(k) = Pr\,\{X_{n+2} = i \,|\, X_{n+1} = i,\, X_n \neq i\} \\
& Pr\,\{X_{n+3} = i \,|\, X_{n+2} = i,\, X_{n+1} = i,\, X_n \neq i\} \ \ldots \\
& Pr\,\{X_{n+k} = i \,|\, X_{n+k-1} = i,\, \ldots,\, X_{n+1} = i,\, X_n \neq i\} \\
& Pr\,\{X_{n+k+1} = j \,|\, X_{n+k} = i,\, \ldots,\, X_{n+1} = i,\, X_n \neq i\} \\
&= Pr\,\{X_{n+k+1} = j,\, X_{n+k} = i,\, \ldots,\, X_{n+2} = i \,|\, X_{n+1} = i,\, X_n \neq i\} \\
&= Pr\,\{Y(T_{m+1}),\, T_{m+1} - T_m = k \,|\, Y(T_m) = i\}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

ist unabhängig von m. □

Abb. ?? skizziert die Verwendung der Symbole. Die in Satz 4 formulierten Übergänge sind die Übergänge der in die semi-Markov-Kette eingebetteten Markov-Kette. Es soll hier darauf hingewiesen werden, daß die spektralen Eigenschaften anders als bei Markov-Ketten, vgl. Kap. ??, nicht in geschlossener Form bestimmt werden können, da sich die Zustandswahrscheinlichkeiten nur rekursiv bestimmen lassen, vgl. [?], p. 170, Gl. (2.5) und (2.6)[13].
Schätzer für $w_{i,j}(l)$ können in der gleichen Weise wie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Ketten abgeleitet werden, vgl. Kap. ??.

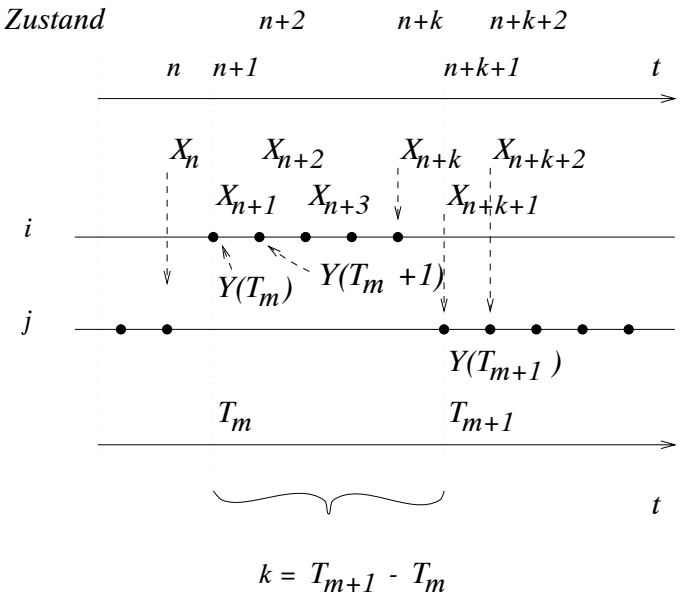

Abb. 3.13 Ausschnitt eines SMP

[13]Es wird unterschieden zwischen dem semi-Markov-Kern $\mathbf{q}(k)$, den Übergangswahrscheinlichkeiten n-ter Ordnung $\mathbf{q}(k)^{[n]}$, der Erneuerungsfunktion $\mathbf{R}(k)$, und den Zustandswahrscheinlichkeiten $\mathbf{p}(k)$, die beim semi-Markov-Prozeß unabhängig von den Erneuerungen sind. Beim Markov-Prozeß tritt dieses Problem nicht auf, da zu jedem Takt auch eine Erneuerung bzw. ein Zustandsübergang stattfindet. Eine Lösung im beschreibenden Bildbereich erscheint möglich.

Es gilt dann

$$\hat{w}_{i,j}(l) = \frac{n_{i,j}(l)}{n_i(l)} \quad l \in \mathbb{N},\ i,j \in \mathbb{E}. \tag{3.93}$$

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten übernehmen also die Funktion der $q_{i,j}$, s. Kap. **??**.

3.1.7 Markov, bzw. Semi-Markov-Prozesse mit zyklischem Zustandsraum zur Modellierung des Funkkanals

Wie noch gezeigt wird, lassen sich mit den bisher vorgestellten Algorithmen (nach LCRs parametrisiert, Markov mit Schätzern parametrisiert, semi-Markov mit Schätzern parametrisiert) i.a. nur AKFn mit streng monoton fallendem Verlauf generieren. Gerade die Nachbildung des klassischen Doppler-Spektrums nach JAKES ist aber so nicht möglich. Im folgenden soll eine Modifikation des Zustandsraumes erfolgen, die eine wesentlich bessere Annäherung der AKF an die geforderte Bessel-Funktion erbringt.

3.1.7.1 Direkte Methode

Der Markov-Prozeß mit dem in Abb. **??** gezeigten Zustandsraum trägt nur das Gedächtnis von einem Zustand in sich. Es existiert kein Gedächtnis, auf welchem Weg der Prozeß in diesen Zustand gekommen ist. Der semi-Markov-Prozeß besitzt zwar gedächtnisbehaftete Zustandsverweilzeiten, jedoch sind Zustandsabfolgen, die durch die eingebettete Markov-Kette beschrieben werden, gedächtnislos. Es zeigt sich, daß mit diesem Modell auf- bzw. abwärts verlaufende Zustandsfolgen ungenügend repräsentiert werden. Dies läßt sich mit den Spektren der zur Parametrisierung verwendeten Prozesse begründen:

Im Kontext dieser Arbeit werden Prozesse mit Spektren untersucht, in denen ausgeprägte Spitzen vorliegen, die auf über- oder unterlagerte Harmonische im Zeitbereich schließen lassen. Der Verlauf dieser Harmonischen ist für die Nachbildung des Spektrums zwingend notwendig und muß im Zustandsmodell berücksichtigt werden; bzw. ein entsprechendes Gedächtnis muß implementiert werden. Dies kann durch eine Aufspaltung des Zustandsraumes geschehen.

Ein Zustandsmodell nach Abb. **??** leistet eine wesentlich bessere Nachbildung komplexer Spektren. Auf diese Weise wird innerhalb des Prozesses ein Gedächtnis erzeugt, so daß das Wissen, ob die gesamte Bewegung des Prozesses zu höheren oder niedrigen Zuständen verläuft, in der Struktur des Zustandsraumes gespeichert werden kann. Die Tatsache, daß sich der Prozeß in einem Zustand der linken Spalte befindet, beinhaltet die Information, daß der Gesamtverlauf der Realisierung des Prozesses auf Zustände mit kleineren Zustandsindizes ausgerichtet ist. Analog ist die rechte Spalte durch die möglichen Zustandsübergänge zu den jeweils höheren Zuständen für den ansteigenden Verlauf ausgelegt. Beim Wechsel vom Anstieg zum Absinken muß die Spalte gewechselt werden, was durch die diagonal eingezeich-

neten Übergänge möglich ist. Da mit der Struktur insbesondere ein zyklisches Umlaufen im Zustandsraum nachgebildet wird, soll für diese Art von Prozessen die Bezeichnung *zyklisch* verwendet werden [14].

Ein Algorithmus, der die Aufspaltung in zwei Zustandsspalten leistet, ist im folgenden skizziert:

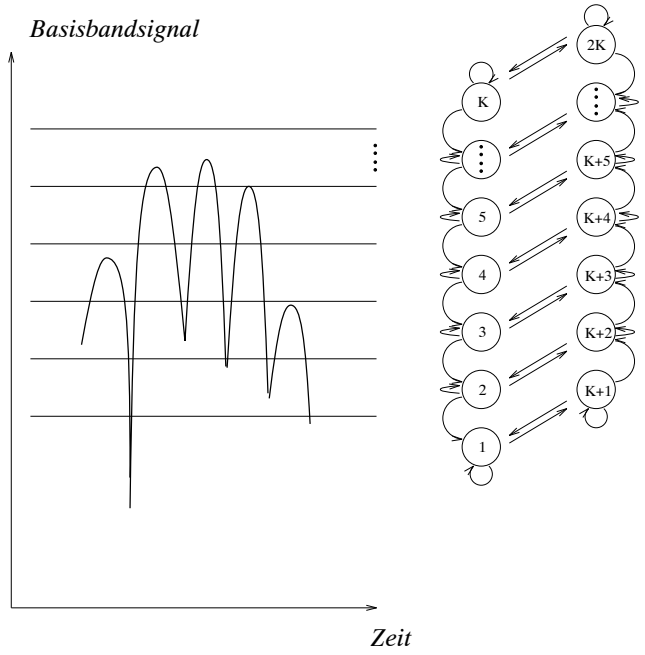

Abb. 3.14 Zyklische semi-Markov-Prozesse

Folgende Variablen werden verwendet:
shift = $m/2 + 1 = K + 1$
i = letzter Zustand von A(n)
j = aktueller Zustand von A(n)

```
BEGIN
if MOVE = ALREADY_UP
      if NOW_UP then
            INC q[i+shift,j+shift]
      if NOW_DOWN then
            MOVE = ALREADY_DOWN
            INC q[i+shift,j]
if MOVE = ALREADY_DOWN
      if NOW_DOWN then
            INC q[i,j]++
      if NOW_UP then
            MOVE = ALREADY_UP
            INC q[i,j+shift]
END
```

3.1.7.2 Matrizentheoretische Methode

Nach [?], p 163 ff. weisen Markov-Ketten mit folgender Struktur der Übergangsmatrix

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{q}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{q}_4 & 0 \\ \mathbf{q}_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

eine zyklische Periodizität in der AKF der Ordnung s auf, falls die Matrix $\mathbf{q}_i$ nach s Verschiebungen wieder die originale Position einnimmt. Werden Matrizen $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}$ gewählt, wird der Verlauf innerhalb einer Periode einheitlich durch $\mathbf{q}$ bestimmt. Es wird in [?] gezeigt, daß sich der gesamte Vektor mit den stationären Wahrscheinlichkeiten aus den gewichteten Vektoren der stationären Wahrscheinlichkeiten der Einzelmatrizen $\mathbf{q}_i$ zusammensetzt. In unserem Fall, da alle $\mathbf{q}_i$ identisch gewählt werden, wird also das stationäre Verhalten dieser Markov-Kette gleich dem der Kette sein, die durch die $m \times m$ Matrix $\mathbf{q}$ parametrisiert

[14] In [?] werden diese Prozesse als *Projektionen von Markov-Prozessen* bezeichnet. Es wird eine gute Übersicht über die gesamte Problematik gegeben ohne jedoch auf konkrete Prozesse einzugehen.

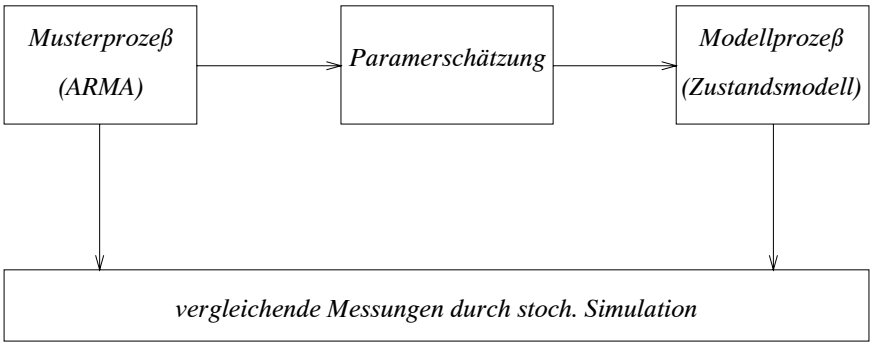

Abb. 3.15 Skizze des Simulationsaufbaus

wurde, vorausgesetzt, es wird eine Abbildung der Zustände mit Indizes größer als m auf die entsprechenden niedrigeren Werte vorgenommen.

Es sollte bei beiden in diesem Kapitel vorgestellten Methoden nicht unbeachtet bleiben, daß die Zustandsräume anwachsen. Insbesondere bei der zuletzt vorgeschlagenen Methode vervielfacht sich die Menge der Zustände. Dies kann evtl. bei der stochastischen Simulation zur Leistungsanalyse in Szenarien mit vielen mobilen Empfängern zu Speicherplatzproblemen führen. Bei der mathematischen Analyse einzelner Mobilfunkkanäle werden jedoch keine Probleme auftreten.

3.1.8 Vergleich der Algorithmen zur Parametrisierung

In Abb. **??** ist der Simulationsaufbau skizziert. Mit digitalen Filtern werden stochastische Prozesse gefiltert, die dann als parametrisierende Prozesse für Zustandsmodelle dienen. Die zu deren Parametrisierung notwendigen Übergangsmatrizen werden geschätzt. Da dies mit endlichen Sequenzen vollzogen wird, treten Schätzfehler auf, die nach Möglichkeit minimiert wurden. In [**?**] wird nachdrücklich darauf hingewiesen, daß es i.a. nicht möglich ist, alle Eigenschaften der parametrisierenden Prozesse auch in den Zustandsmodellen wiederzufinden, so daß man sich auf charakteristische Eigenschaften beschränken muß[15]. Da in der Tradition der Modellierung von Funkkanälen ausnahmslos die Korrelationseigenschaften 1. Ordnung untersucht wurden und man sich auch im COST-207-Projekt auf diese charakteristischen Eigenschaften beschränkte, soll dies im folgenden auch geschehen.

Weiterhin ist es nicht möglich, beliebig große Matrizen bei den semi-Markov-Modellen zu verwenden, so daß eine maximale Verweilzeit s vorgesehen werden muß, ab der die Modelle dann in reine Markov-Modelle übergehen. Mathematisch heißt dies, daß $q_{i,j}(k)$ zunächst lediglich auf $k = 1, 2, 3, \ldots, s$ definiert ist, und für $k > s$ gilt $q_{i,j}(k) = q_{i,j}(s)$.

Ausführlichere Beschreibungen der Simulations- und Meßanordnung finden sich in [**?**].

Zur Parametrisierung dient ein ARMA-Prozeß mit dem *klassischen Doppler-Spektrum* nach Jakes. Die Doppler-Frequenz wurde mit $f_d = 4.5$ und die Abtastfrequenz mit 100 gewählt.

[15] In der genannten Arbeit werden insbesondere die Korrelationsfunktionen höherer Ordnung definiert und die entsprechenden Spektren abgeleitet.

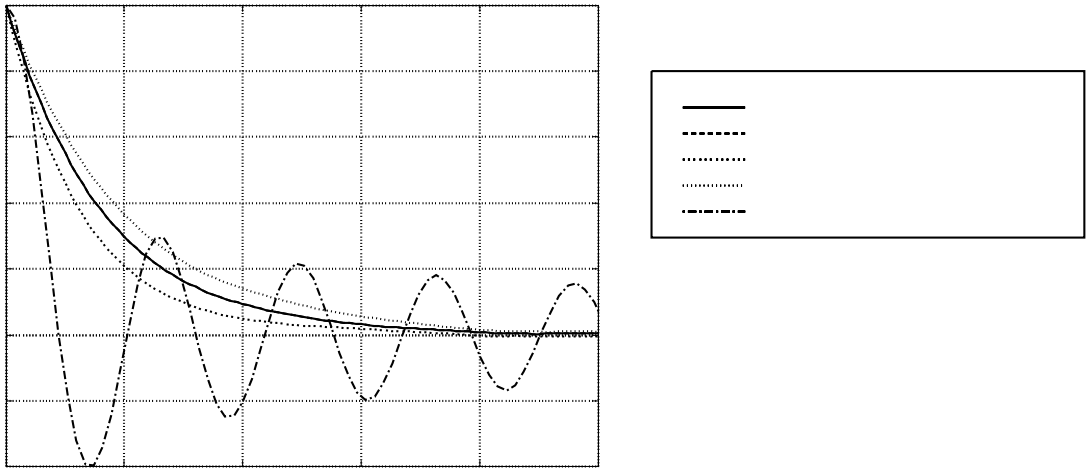

Abb. 3.16 AKF $C_{JJ}(k)$ von Markov- ($s = 1$) bzw. semi-Markov-Prozessen ($s = 5$)

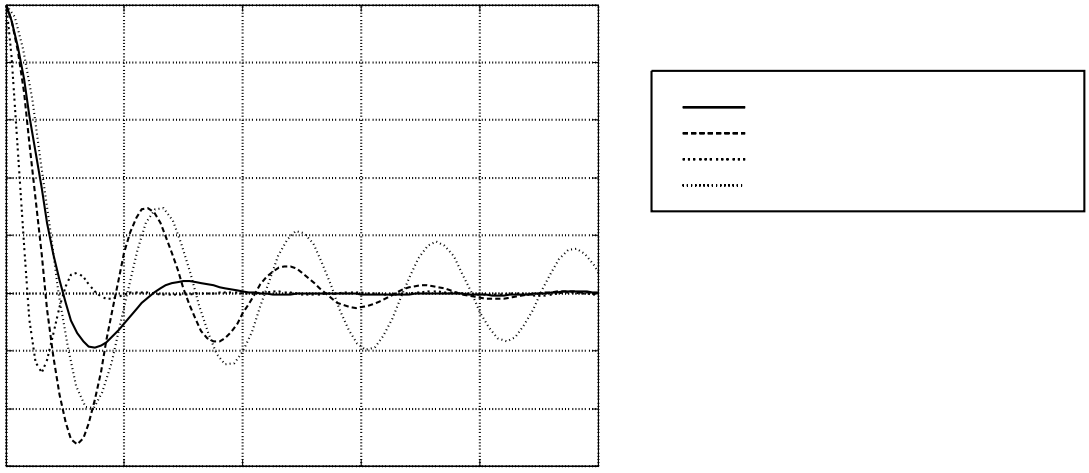

Abb. 3.17 AKF $C_{JJ}(k)$ von zykl. Markov- ($s = 1$) bzw. zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 5$)

In Abb. **??** ist die vollständige Streufunktion $S(\cdot, \cdot)$ abgebildet. Abb. **??** zeigt das *klassische* Doppler-Spetrum für $S(\cdot)$, das die spektralen Eigenschaften von $S(\cdot, \cdot)$ für einen Pfad wiedergibt, vgl. Gl. **??** und Seite 31 unten. Ebenfalls gezeigt sind die Leistungsdichtespektren von Markov-Prozessen, die mit diesem ARMA-Prozess nach Gl. **??** parametrisiert wurden. Offensichtlich kann das Spektrum nicht adäquat nachgebildet werden.

Abb. **??** zeigt, ähnlich Abb. **??** für die LCR-Modelle, die AKF von (nicht zyklischen) Markov- bzw. semi-Markov-Prozessen für $m = 6, 8, 17$, wobei die maximale Verweilzeit $s = 5$ beträgt. Für $m = 8$ wurde außerdem der Markov-Prozeß ($s = 1$) untersucht. Es ergibt sich ausnahmslos eine streng monoton fallende AKF. Dabei liegen die Kurven für $m = 8, s = 1$ bzw. $s = 5$ übereinander. Die Berücksichtigung der nicht-Markov-Eigenschaft (durch den SMP) genügt nicht, um die analytisch berechnete Bessel-Funktion anzunähern.

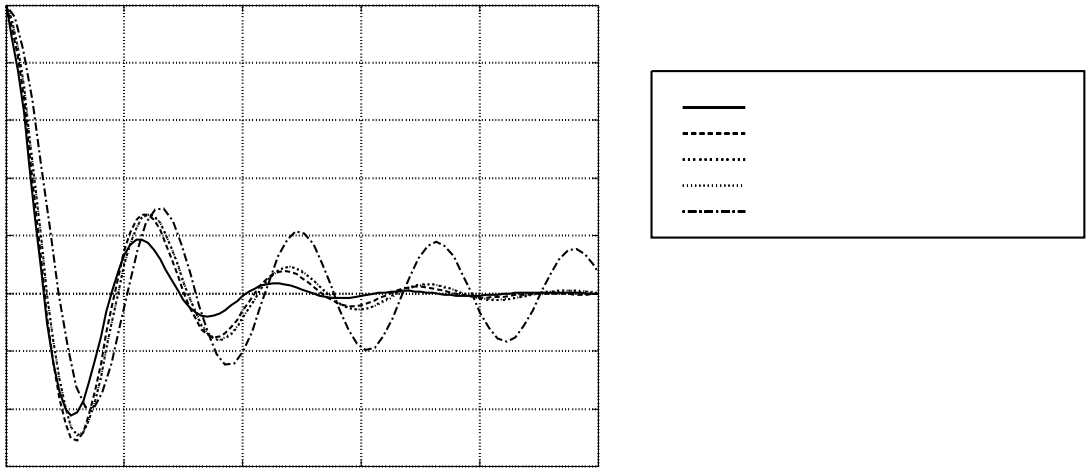

Abb. 3.18 AKF $C_{JJ}(k)$ von zykl. semi-Markov-Prozessen

Der Orientierung wegen wird für zyklische Markov- bzw. semi-Markov-Prozesse die effektive Zustandszahl m' verwendet, die effektiv das gleiche Intervall bzgl. des parametrisierenden Prozesses abdeckt, wobei gilt $2(m'-1) = m$.

Abb. **??** zeigt die AKF von zyklischen Markov- bzw. semi-Markov-Prozessen für $m' = 8, 11$ bei $s = 1,5$ [16]. Bei den zykl. Markov-Prozessen ist schon ein leichtes Einschwingen zu erkennen, während der semi-Markov-Prozeß mit $m' = 8, s = 5$ die Bessel-Funktion schon gut annähert.

Abb. **??** zeigt die AKF von zyklischen semi-Markov-Prozessen für $m' = 4, 6, 15, 17$, bzw. $m = 6, 10, 28, 32$ bei $s = 5$. Alle AKFn zeichnen das Schwingen der vorgegebenen Bessel-Funktion nach. Bei großen Abständen k klingen die AKFn jedoch stärker ab als die Bessel-Funktion. Es zeigen sich kaum Unterschiede bei den AKFn untereinander. Lediglich der Zustandsraum von $m' = 4$ beinhaltet offensichtlich nicht ausreichendes Gedächtnis.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Anzahl der Zustände, sobald sie eine Mindestmenge von $m' = 6$ bzw. 8 erreichen, nicht sehr entscheidend ist. Vielmehr ist die Art des Zustandsraumes und in geringerem Maße die maximale Verweilzeit s von Bedeutung. Wenn möglich sollte die hier vorgestellt zyklische Struktur zur Modellierung gewählt werden.

Bei den Spektren ergibt sich ein analoges Bild.

Abb. **??** zeigt die Spektren eines (nicht zyklischen) Markov-Prozesses mit $m = 15$ und eines zyklischen semi-Markov-Prozesses mit $m' = 15, s = 10$. Es ist deutlich, daß der zyklische semi-Markov-Prozeß das geforderte Doppler-Spektrum gut annähert, während der Markov-Prozeß völlig unzureichend zur Annäherung des klassischen Doppler-Spektrums ist.

[16] Im vorliegenden Fall besitzen die Zustandsmodelle also als zyklische Modelle insgesamt $m = 14$ bzw. 20 Zustände.

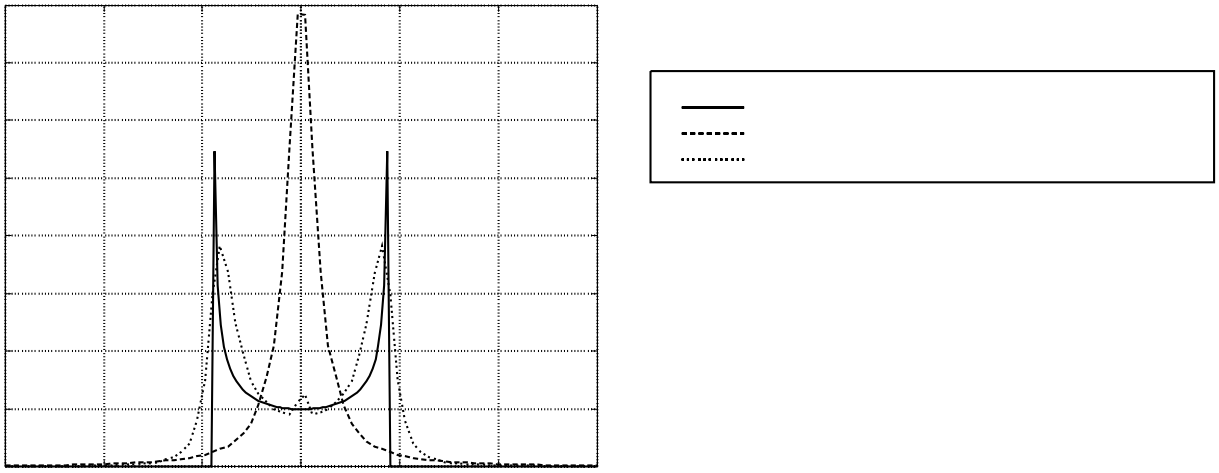

Abb. 3.19 Spektren $S_{JJ}(f)$ von Markov- ($s = 1$) bzw. zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 10$)

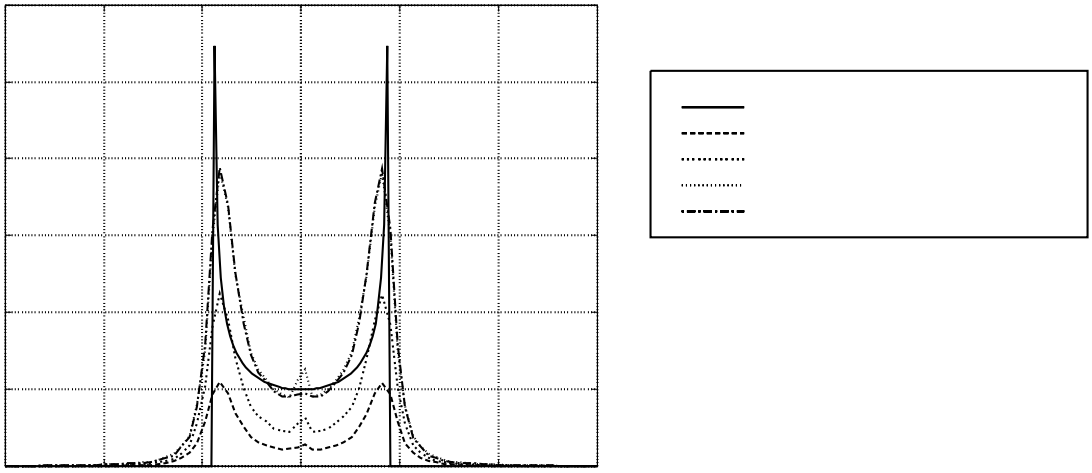

Abb. 3.20 Spektrum $S_{JJ}(f)$ von zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 5, 10$)

Abb. **??** zeigt die Spektren für $m' = 6, 8, 15$ bei $s = 5$ und $m' = 15, s = 10$. Man sieht deutlich, daß zunächst mit steigenden Zustandszahlen m' das klassische Dopplerspektrum besser angenähert wird, dann aber kaum noch eine Verbesserung eintritt. Bei $m' = 15, s = 5$ bildet sich eine Spitze um den Nullpunkt heraus, die bei größerer maximaler Verweilzeit s wieder etwas reduziert wird.

Abb. **??** zeigt die Spektren für $m' = 6, 8$ bei $s = 1$ für zykl. Markov-Prozesse. Ähnlich wie bei den AKFn tritt hier eine leichte Annäherung an das klassische Doppler-Spektrum ein. Eine gute Annäherung wird jedoch erst bei dem zykl. semi-Markov-Prozeß mit $m' = 15, s = 5$ erreicht.

Abb. **??** zeigt die Spektren für $m' = 8$ bei steigenden maximalen Verweilzeiten s. Der maximale Wert von $s = 10$ erbringt nur noch geringe Verbesserungen. Abb. **??** zeigt Ergebnisse

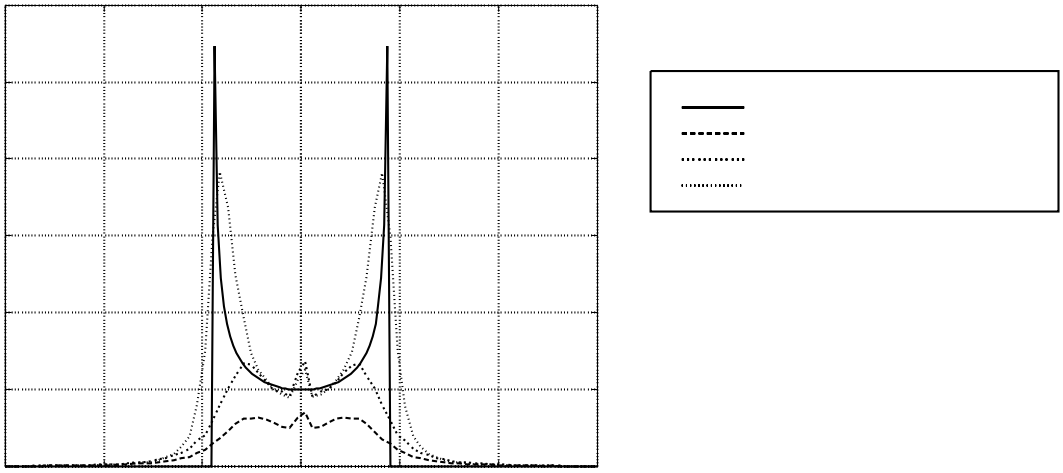

Abb. 3.21 Spektrum $S_{JJ}(f)$ von zykl. Markov- ($s = 1$) bzw. zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 5$)

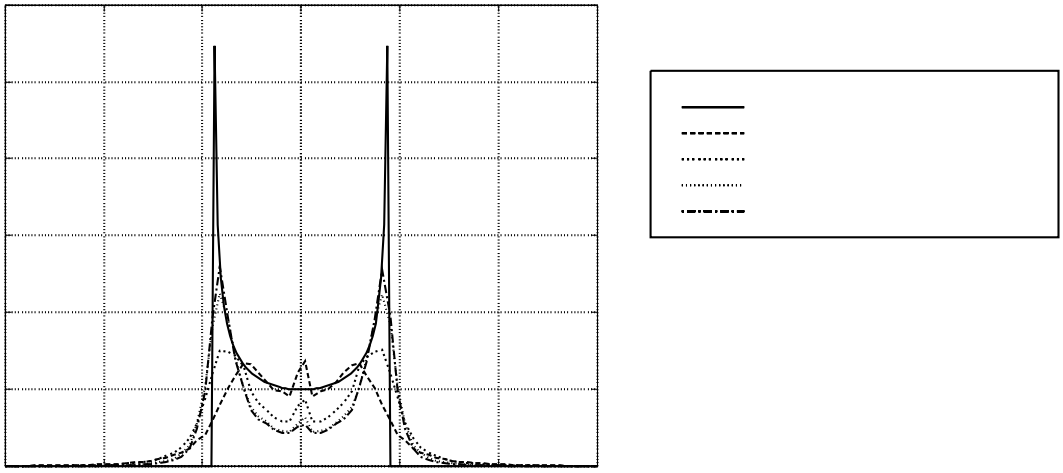

Abb. 3.22 Spektrum $S_{JJ}(f)$ von zykl. Markov- ($s = 1$) bzw. zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 3, 5$)

für andere Parameterkombinationen m' und s, dabei wurden mittlere Werte gewählt.

In der folgenden Tabelle sind die quadratischen Abstände zum klassischen Doppler-Spektrum dargestellt. Die Aufstellung wurde auf die wichtigsten Kombinationen von m, m' und s beschränkt:

m' = 8, s = 1	m' = 8, s = 3	m' = 8, s = 5	m' = 8, s = 10	m'= 11, s = 1	m'= 11, s = 5
7.33	5.71	5.50	5.36	7.73	5.04

Die Schwellen wurden mit
$\mathbb{A}_4 = \{-1.1, 0.0, 1.1\}$,
$\mathbb{A}_6 = \{-1.4, -0.7, 0.0, 0.7, 1.4\}$,
$\mathbb{A}_8 = \{-1.5, -1.0, -0.5, 0.0, 0.5, 1.0, 1.5\}$,
$\mathbb{A}_{11} = \{-2.4, -1.8, -1.2, -0.9, -0.3, 0.3, 0.9, 1.2, 1.8, 2.4\}$,

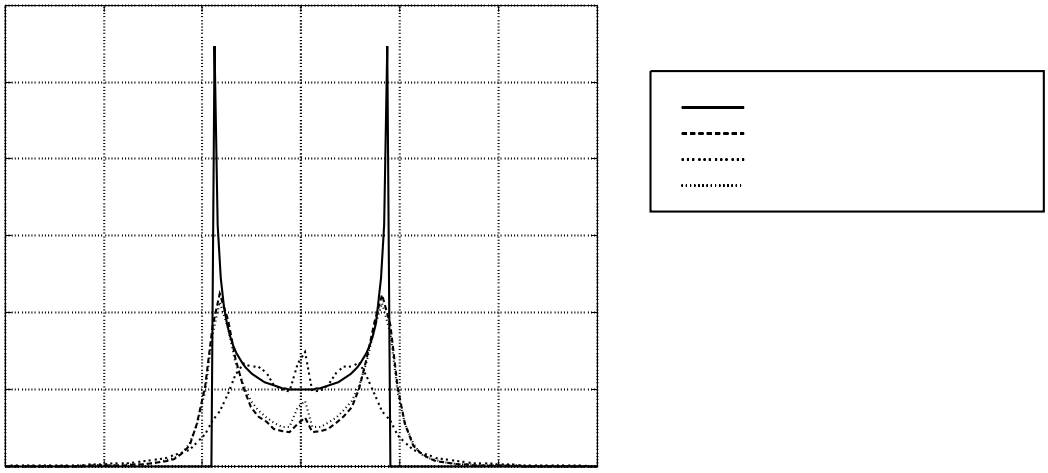

Abb. 3.23 Spektrum $S_{JJ}(f)$ von zykl. Markov- ($s = 1$) bzw. zykl. semi-Markov-Prozessen ($s = 5$)

$\mathbb{A}_{15} = \{-2.6, -2.2, -1.8, -1.4, -1.0, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1.0, 1.4, 1.82.2, 2.6\}$
gewählt.

Es wird deutlich, daß mit den hier vorgestellten zyklischen semi-Markov-Prozessen eine verbesserte Annäherung des klassischen Doppler-Spektrums erreicht wird.

Werden parametrisierende Prozesse mit einem einfachen abfallenden Spektrum verwendet, wird z.B. zur Filterung des parametrisierenden Prozesses ein Butterworth-Filter 2. Ordnung verwendet, kann die Parametrisierung durch alle vorgestellten Algorithmen vorgenommen werden. Die spektralen Eigenschaften werden ausnahmslos gleich gut nachgebildet, vgl. [**?**]. In diesem Fall weist auch das LCR-Modell ausreichende Eigenschaften auf.

Untersuchungen der Fehlerprozesse der verallgemeinerten Gilbert-Elliott-Modelle

In diesem Kapitel soll der sich bei Zustandsmodellen einstellende Fehlerprozeß untersucht werden. Die in Kapitel 3 vorgestellten Zustandsmodelle für den Funkkanal bilden das zeitvariante Signal, bzw. die Leistung der Einhüllenden nach. Diese Prozesse beinflussen den Fehlerprozeß, so daß man den Fehlerprozeß als den dem Zustandsprozeß *überlagerten* Prozeß bezeichnen kann. Aus der Sicht des Fehlerprozesses bildet der Prozeß für den Funkkanal dann den *modulierenden* Prozeß. Für den Fall, daß der modulierende Prozeß ein Markov-Prozeß ist, sind aus der Verkehrstheorie doppelt stochastische Prozesse bekannt, die diesen Fehlerprozeß erfassen.

Das Auftreten der evtl. gestörten Symbole in den jeweiligen Zuständen des Modells für den Funkkanal kann durch einen zeitdiskreten Ankunftsstrom modelliert werden, der dem zeitkontinuierlichen Markov-Modulierten-Poisson-Prozeß sehr ähnlich ist.

4.1 Der Markov-Modulierte-Poisson-Prozeß, eine Zusammenfassung

Nach [?, ?] ist der Markov-Modulierte-Poisson-Prozeß (MMPP) ein zeitkontinuierlicher, doppelt stochastischer Prozeß. Sei $\{J(t), t \in \mathbb{R}_0\}$ ein irreduzibler, zeitkontinuierlicher, zustandsdiskreter Markov-Prozeß mit m Zuständen. In diesen ist ein zweiter Prozeß eingelagert, ein Poisson-Prozeß, dessen Raten λ_j vom Zustand j der Markov-Kette $\{J(t)\}$ bestimmt werden. Infolgedessen existieren die Raten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Die Markov-Kette, mit m-Zuständen versehen, sei durch den Infinitesimal-Generator $\mathbf{Q}$ parametrisiert. $\mathbf{Q}$ enthält die Übergangsintensitäten $\sigma_{i,j}$, vgl. [?].

Es soll die folgende Notation verwendet werden:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \sigma_{12} \ldots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & -\sigma_2 \ldots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{k2} \ldots & -\sigma_m \end{pmatrix} \qquad \sigma_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \sigma_{ij},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T. \qquad (4.1)$$

Weiterhin sollen die Zustände der modulierenden Markov-Kette zu den Zeiten der Ankünfte

mit $J_n, n > 0$ bezeichnet werden (J_0 zur Zeit $t = 0$). Sei X_n die Zeit zwischen der (n)-ten und der $(n-1)$-ten Ankunft. In Abb. **??** ist der Zustandsraum des Prozesses skizziert.

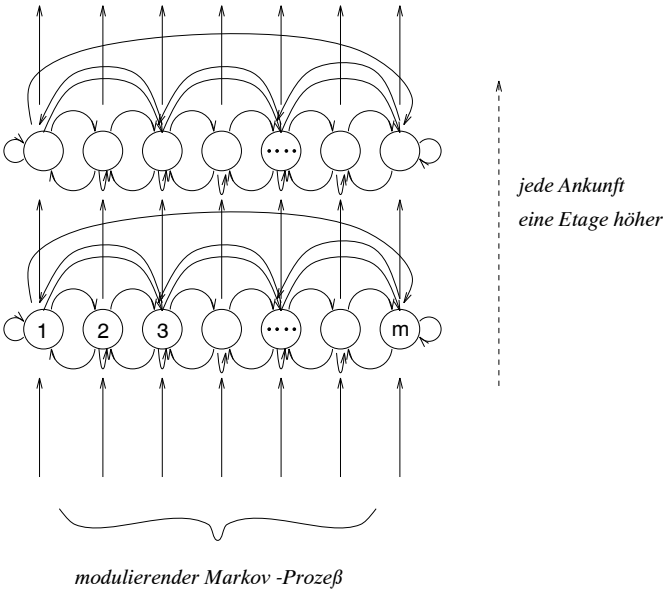

Abb. 4.1 Ausschnitt aus dem Zustandsraum des MMPP

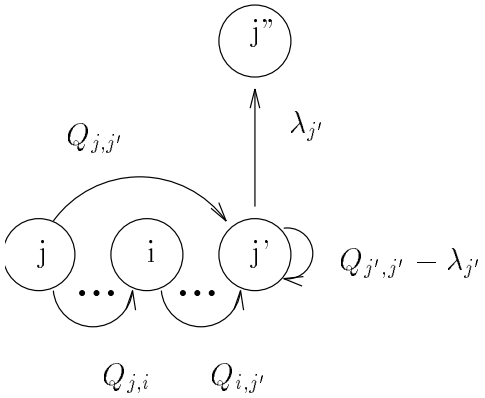

Abb. 4.2 Übergänge zum Verständnis der C-K-Gleichungen

Sei $P_{j,j'}(t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die Markov-Kette zur Zeit t im Zustand j' ist und daß im Intervall (0,t) keine Ankünfte auftreten unter der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Markov-Kette im Zustand j war. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{j,j'}(t)$ genügen dann den Chapmann-Kolmogorov (C-K) - Gleichungen

$$P'_{j,j'}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{m} P_{j,k}(t)\, Q_{k,j'} \;-\; P_{j,j'}(t)\, \lambda_{j'} \qquad \text{für } t \geq 0,\;\; j, j' \in \mathbb{E}, \tag{4.2}$$

vgl. Abb. **??**, die den gesamten Prozeß beschreibt und Abb. **??**, die die C-K-Gleichungen verdeutlicht. In Matrixnotation

$$\mathbf{P}'(t) \;=\; \mathbf{P}(t)\;\exp\{(\mathbf{Q} \;-\; \mathbf{\Lambda})\, t\}, \quad \mathbf{P}(0) = I,$$

hat dieses System die Lösung

$$\mathbf{P}(t) \;=\; \exp\{(\mathbf{Q} \;-\; \mathbf{\Lambda})\, t\}, \qquad \text{für } \; t \geq 0. \tag{4.3}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit der ersten l Ankünfte zu den Zeiten u_1, $u_1 + u_2 \ldots u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_l$, unter der Bedingung, daß der Anfangszustand j war, kann dann als

$$P_{j,j_1}(u_1)\, \lambda_{j_1}\, P_{j_1,j_2}(u_2)\, \lambda_{j_2}\, P_{j_2,j_3}(u_3)\, \lambda_{j_3}\; \ldots\; P_{j_{l-1},j_l}(u_l)\, \lambda_{j_l}\, du_1\, du_2\; \ldots\; du_l \tag{4.4}$$

beschrieben werden. Folglich ist $\{(J_n, X_n), n \geq 0\}$ eine Markov-Erneuerungssequenz mit den bedingten Verteilungsfunktionen

$$F_{i,j}(x) \;=\; Pr\{J_{n+1} = j,\, X_{n+1} \leq x \,|\, J_n = i\}, \qquad x \geq 0\; i, j \;\in \mathbb{E}. \tag{4.5}$$

Die korrespondierende Matrix, die auch als *semi-Markov-Kernel* oder *semi-Markov-Kern* bezeichnet wird, ist dann

$$\mathbf{F}(x) = \int_0^x exp\{(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda})\, u\}\, du\, \mathbf{\Lambda} = \{I - \exp(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda})\, x\}\, \mathbf{F}(\infty). \tag{4.6}$$

Der Vektor der stationären Zustandsverteilung der Markov-Kette ist $\underline{\pi}\,\mathbf{Q} = \underline{0}$. Wird der Markov-Erneuerungsprozeß nur zu den Zeitpunkten betrachtet, zu denen Zustandswechsel auftreten, kann eine eingebettete Markov-Kette definiert werden. Es sei

$$\underline{\tilde{\pi}}^T = \underline{\tilde{\pi}}^T\, \mathbf{F}(\infty). \tag{4.7}$$

Es kann gezeigt werden, daß die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung der eingebetteten Markov-Kette mit $\underline{\tilde{\pi}}^T = \frac{1}{\underline{\pi}^T \underline{\lambda}}\, \underline{\pi}^T\, \mathbf{\Lambda}$ berechnet werden kann, s. [?].

4.2 Die zeitdiskrete Variante des MMPP, der MMBP

Das eventuelle Auftreten gestörter Symbole kann durch einen zeitdiskreten Ankunftsstrom modelliert werden. Im folgenden wird die zeitdiskrete Version des Markov-Modulierten-Poisson-Prozesses (MMPP) abgeleitet.

Ist der Funkkanal in einem bestimmten Zustand i, dann werden mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi_{i\in\mathbb{E}}$ Fehler produziert. Wir benötigen also das zeitdiskrete Äquivalent des MMPP, um den Fehlerprozeß zu beschreiben. Es ist sinnvoll, diesen Prozeß als Markov-Modulierten-Binomial-Prozeß (MMBP) zu bezeichnen. Veröffentlichungen aus der letzten Zeit stellen eine ähnliche, jedoch kompliziertere Ableitung vor, s. [?]. In dem Artikel von F. Guillemin et. al., s. [?], ist eine Ableitung beschrieben, bei deren Prozeß es nicht möglich ist, daß zur gleichen Zeit ein Fehler, bzw. eine Erneuerung produziert wird und der modulierende Prozeß Zustandswechsel durchführt. Dieses Problem wird in der folgenden Ableitung noch auftreten.

Der modulierende Markov-Prozeß $\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ ist durch $\mathbf{q}$ parametrisiert, vgl. Kap. **??** bzw. **??**. In Abb. **??** ist ein Zustand mit seinen Übergängen skizziert. Dieser Prozeß ist diskret in der Zeit; er wird auch als Markov-Kette bezeichnet. In einer ersten Näherung werden die Übergänge nicht verändert, lediglich die Parameter sollen angepaßt werden. Wir erhalten nun nicht mehr ein $t \in \mathbb{R}$, sondern $t \in \mathbb{N}_0$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der in einem bestimmten Zustand i Fehler generiert werden, sei φ_i mit

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m). \tag{4.8}$$

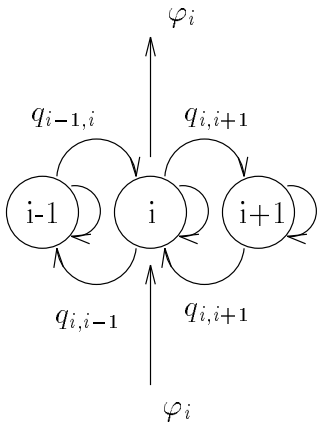

Abb. 4.3 Übergänge des MMBP

Es sei angemerkt, daß der Zustand i in allen Etagen des Modells erscheint, vgl. Abb. **??**, und daß φ_i der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen benachbarten Etagen entspricht.

Sei $p_{j,j'}(t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die Markov-Kette im Zustand j' zur Zeit t ist und daß im Intervall (0,t] keine Ankünfte auftreten, unter der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ der Zustand j war. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{j,j'}(t)$ genügen dann den C-K-Gleichungen

$$p_{j,j'}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{m} p_{j,k}(t-1)\, q_{k,j'} \;-\; p_{j,j'}(t-1)\, \varphi_{j'} \qquad t \in \mathbb{N},\; j, j' \in \mathbb{E}. \tag{4.9}$$

Die Lösung ist

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} q_{i,i} \;-\; \varphi_i & \text{falls} \quad j = i \\ q_{i,j} & \text{falls} \quad j \neq i, \quad i,j \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Da $q_{i,i}$ die Übergänge der Markov-Kette von Zustand $J(t) = i \rightarrow J(t+1) = i$ unabhängig von der Tatsache beschreibt, ob Fehler produziert werden oder nicht, muß $q_{i,i}$ um φ_i reduziert werden, um die Übergangswahrscheinlichkeit ohne begleitende Fehler zu beschreiben. Dies ist durch Gl. **??** ausgedrückt.

Demnach gilt für die obengenannte Lösung in Matrixnotation[1]

$$\mathbf{p}\,(t) \;=\; (\mathbf{q} \;-\; \mathbf{\Phi})^{[t]} \;=\; (\mathbf{q} \;-\; \mathbf{\Phi})^{t} \qquad t \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix t-ter Ordnung wird dann durch $(\cdot)^{[t]}$, $t \in \mathbb{N}$ beschrieben.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von Fehlergruppen zu den Zeiten t_1, $t_1 + t_2 + t_3$, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$, $\ldots\, t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_{l-1} + t_l$, unter der Bedingung, daß der Anfangszustand j ist, wird dann durch

$$p_{jj_1}\,(t_1)\; \underbrace{\varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_1}}_{t_2 \text{ mal}}\; p_{j_1 j_2}\,(t_3)\; \underbrace{\varphi_{j_2} \cdots \varphi_{j_2}}_{t_4 \text{ mal}}\; p_{j_2 j_3}\,(t_5)\; \underbrace{\varphi_{j_3} \cdots \varphi_{j_3}}_{t_6 \text{ mal}}\; \cdots p_{j_{l-1} j_l}\,(t_l)\,\varphi_{j_l} \tag{4.12}$$

beschrieben.

Der Prozeß $\{(J_n, X_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ ist also das zeitdiskrete Äquivalent des MMPP. Offensichtlich sind beide Prozesse Markov-Erneuerungsprozesse, vgl. Gl. **??** und Definition 6.

Es ist mit dem in Abb. **??** gezeigten Zustandsmodell nicht möglich, daß zur gleichen Zeit ein Fehler produziert wird und der modulierende Prozeß Zustandswechsel durchführt. Dennoch ist es möglich, analog zum MMPP, vgl. Gl. **??**, die bedingte VDF in Matrixnotation zu formulieren. Sei $f_{ij}(x) = Pr\{J_{n+1} = j,\, X_{n+1} = x \,|\, J_n = i\}$ die VDF für die Abstände X_n von einem fehlerhaften Symbol bis zum nächsten, dann gilt

$$\mathbf{f}(x) \;=\; \mathbf{p}(x-1)\;\mathbf{\Phi} \;=\; (\mathbf{q} - \mathbf{\Phi})^{x-1}\;\mathbf{\Phi} \qquad x \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Damit zur gleichen Zeit Übergänge der modulierenden Markov-Kette wie auch Übergänge durchgeführt werden können, die durch Fehler begleitet werden, muß der Zustandsraum modifiziert werden. In Abb. **??** sind die modifizierten Übergänge skizziert. Nun ist es möglich, sich im Zustandsraum diagonal zu bewegen. Das bedeutet, daß die nächste Etage erreicht werden kann und sich zur gleichen Zeit der Zustand der modulierenden Markov-Kette ändern kann.

[1] Mit der Definition $\mathbf{p}^{[0]} = \mathbf{I}$ läßt sich der Wertebereich von Gl. **??** auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ erweitern.

Sei $p_{j,j'}(t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß sich die Markov-Kette zur Zeit t im Zustand j' befindet und daß im Intervall (0,t] keine Fehler auftreten, unter der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Markov-Kette im Zustand j war. Die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $p_{j,j'}(t)$ genügen den C-K Gleichungen

$$p_{j,j'}(t) = \sum_{k=1}^{m} p_{j,k}(t-1)\; q_{k,j'}\; (1-\varphi_k) \quad t \in \mathbb{N},\; j, j' \in \mathbb{E}. \tag{4.14}$$

Die Lösung in Matrixnotation ist dann

$$\mathbf{p}(t) \;=\; \mathbf{w}^{\,t} \qquad t \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

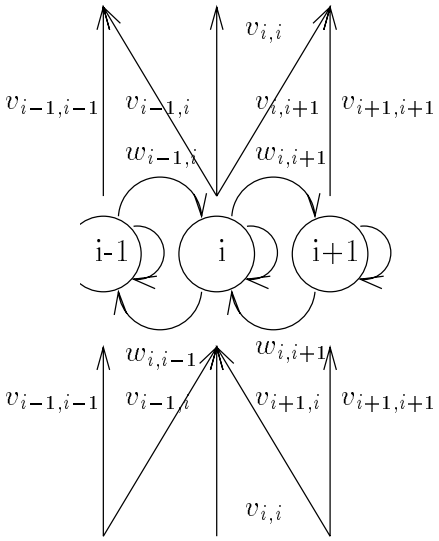

Abb. 4.4 Modifizierte Übergänge des MMBP

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \;&=\; \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mm} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q_{11}(1-\varphi_1) & q_{12}(1-\varphi_1) & \dots & q_{1m}(1-\varphi_1) \\ q_{21}(1-\varphi_2) & q_{22}(1-\varphi_2) & \dots & q_{2m}(1-\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}(1-\varphi_m) & q_{m2}(1-\varphi_m) & \dots & q_{mm}(1-\varphi_m) \end{pmatrix} = \mathbf{\Delta}\;\mathbf{q}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Außer der Matrix $\mathbf{\Phi}$ haben wir nun eine zweite Matrix $\mathbf{\Delta} = \mathbf{diag}(1-\varphi_1, 1-\varphi_2, \dots, 1-\varphi_m)$. Übergänge, die nicht durch auftretende Fehler begleitet werden, sind durch die Matrix $\mathbf{w}$ beschrieben. In gleicher Weise gibt es Übergänge, die durch auftretende Fehler begleitet werden. Sie sind durch die Matrix $\mathbf{v}$ charakterisiert.

$$\mathbf{v} \;=\; \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}\varphi_1 & q_{12}\varphi_1 & \dots & q_{1m}\varphi_1 \\ q_{21}\varphi_2 & q_{22}\varphi_2 & \dots & q_{2m}\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}\varphi_m & q_{m2}\varphi_m & \dots & q_{mm}\varphi_m \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\;\mathbf{q} \tag{4.17}$$

Bezugnehmend auf den Fehlerprozeß $\{e_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, s. Def. 2, gilt also für die Elemente $v_{i,j}$ und $w_{i,j}$ der Matrizen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$

$$Pr\{e_t = 1 \;\wedge\; J(t) = j \,|\, J(t-1) = i\} \;=\; v_{i,j}, \qquad i, j \in \mathbb{E} \tag{4.18}$$

und

$$Pr\{e_t = 0 \;\wedge\; J(t) = j \,|\, J(t-1) = i\} \;=\; w_{i,j}, \qquad i, j \in \mathbb{E}. \tag{4.19}$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Demnach wird der Fehlerprozeß durch eine Sequenz von Fehler- bzw. Nicht-Fehler-Gruppen beschrieben, vgl. Abb. **??**. Die Übergänge, die zeitlich zwischen zwei Fehlergruppen auftreten, werden durch **w** beschrieben. Die Gruppe der Fehler ist durch **v** gekennzeichnet. So ist die Sequenz der $n_2 + n_4 + \ldots + n_{l+1}$-ten Fehler bestimmt durch

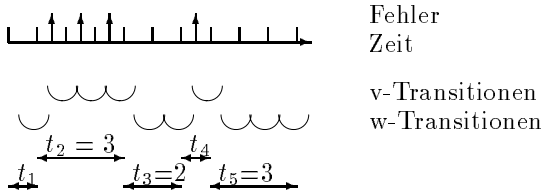

Abb. 4.5 Fehler-Prozeß und Übergänge

$$w_{j,j_1}{}^{[n_1]}\ v_{j_1,j_2}{}^{[n_2]}\ w_{j_2,j_3}{}^{[n_3]}\ v_{j_3,j_4}{}^{[n_4]} \ldots w_{j_{l-1},j_l}{}^{[n_l]}\ v_{j_l,j_{l+1}}{}^{[n_{l+1}]}, \tag{4.20}$$

wobei die erste Gruppe n_2, die zweite n_4 und die letzte Gruppe n_{l+1} Fehler enthält.

Ähnlich Gl. **??** läßt sich die bedingte VDF der Zwischenfehler-Abstände berechnen. Sei $f_{ij}(x) = Pr\{J_{n+1} = j,\ X_{n+1} = x \mid J_n = i\}$. Die Matrix der bedingten VDFn ist dann[2]

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{falls } x = 1, \\ \mathbf{w}^{[x-1]}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}^{x-1}\,\mathbf{v} & \text{sonst, } x \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Offensichtlich ist der Prozeß $\{(J_n, X_n), n \in \mathbb{N}\}$ ein Markov-Erneuerungsprozeß mit dem semi-Markov Kern $\mathbf{f}(x)$, ähnlich [**?**] p. 21, vgl. auch Def. 7.

Hier sollen die Bemerkungen von [**?**], p. 21 noch zitiert werden, die den Zusammenhang zu anderen Prozessen deutlich machen: "We may think of a Markov renewal process as the state at time t of a system which moves from one state to another with random sojourn times in between. The length of a sojourn interval X_n is a random variable whose distribution depends on both the state J_n being visited and the next state to be visited next. The successive states visited form a Markov chain given that sequence, the successive times are conditionally independent.

Both the renewal process and the Markov chain are special cases of the Markov renewal process.

- The renewal process corresponds to the case where the state space $\mathbb{E}$ consists of a single point.
- The discrete time Markov chain correponds to the case where X_n takes the value 1 for all n.
- The continuous time Markov chain corresponds to the case where X_n is exponentially distributed with a rate that depends on J_n."

In Abb. **??** ist eine möglich Realisierung des MMBP mit $m = 3$ Zuständen gezeigt.

[2] Wird, wie allg. üblich $\mathbf{w}^0 = \mathbf{I}$ definiert, läßt sich der Kern einfacher ohne Fallunterscheidung schreiben als $\mathbf{f}(x) = \mathbf{w}^{x-1}$.

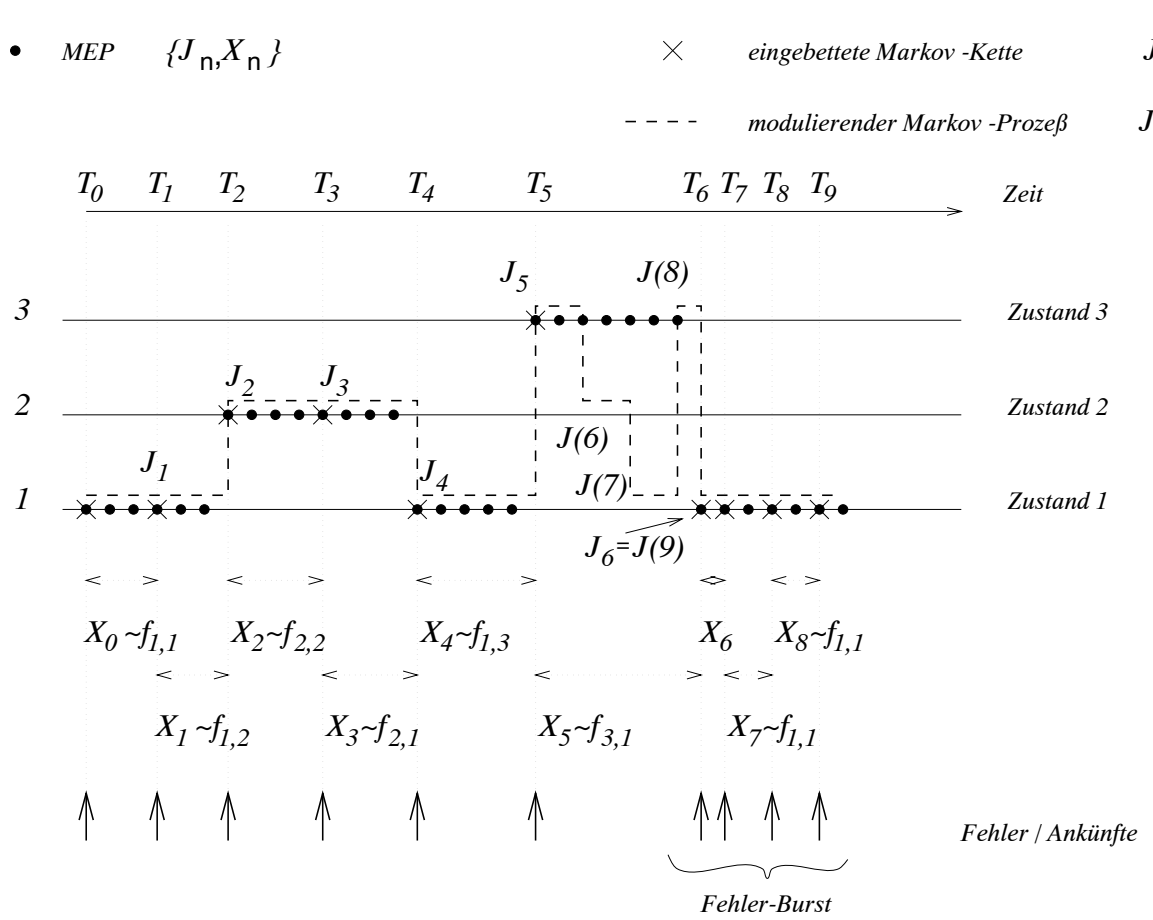

Abb. 4.6 Beispielhafter Pfad eines MMBP

Wir fassen zusammen:

Der MMBP ist ein spezieller zeitdiskreter Markov-Erneuerungsprozeß, der durch den semi-Markov-Kern $\mathbf{f}(x), x \in \mathbb{N}$ vollständig bestimmt ist. In diesen Prozeß ist eine Markov-Kette eingebettet, die durch $\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{f}(l) = (\mathbf{I} - \mathbf{w})^{-1}\,\mathbf{v}$ beschrieben ist. Die modulierende Markov-Kette ist an den Punkten, zu denen Fehler/Erneuerungen auftreten, identisch der eingebetteten Markov-Kette. Zwischen diesen Zeitpunkten bewegt sie sich nach Maßgabe von $\mathbf{q}$. So ist eine Realisierung, wie Abb. **??** sie zeigt, möglich. Man achte auf die Zeitpunkte T_5 und T_6 und den entsprechenden Verlauf zwischen diesen Punkten.

In der folgenden Tabelle findet sich eine Übersicht der verwendeten Bezeichnungen mit den parametrisierenden Größen.

	MMPP MMBP	modulierender Markov-Prozeß	Markov-Erneuerungs-Prozeß	Kern	eingebetteter Markov-Prozeß
zeitkontinuierlich	$\mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{F}(x)$	$\mathbf{F}(x)$	$\mathbf{F}(\infty)$
zeitdiskret	$\mathbf{q}, \mathbf{\Phi}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{f}(x)$	$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{f}(l)$

Tab. 4.1 Verwendeten Bezeichnungen

4.2.1 Der diskrete Markov'sche Ankunftsprozeß als Modell für den Fehlerprozeß

In den Beiträgen von BLONDIA [?, ?, ?] wird der DMAP (Discrete Markov Arrival Process) als zeitdiskretes Analogon des MAP (Markov Arrival Process), der von LUCATONI in [?] vorgestellt wurde, entworfen[3]. Der DMAP wird in der Verkehrstheorie als Prozeß für korrelierte Ankünfte verwendet, s. [?].

Der DMAP wird mit Hilfe einer Markov-Kette und *verschiedenen Typen von Übergängen* definiert. Bei dem DBMAP (Discrete Batch Markov Arrival Process) sind beliebig viele Typen möglich, während bei dem DMAP nur zwei Typen Verwendung finden. In dem konkreten Fall der Fehlerprozesse sind dies die *Fehler* bzw. *Nicht-Fehler*, d.h. die fehlerfreien Symbole.

Definition 9 *(DBMAP)*

Ein SP $\{(J(n), W(n)), n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt DBMAP (Discrete Batch Markov Arrival Process) mit nicht leerem Zustandsraum $\mathbb{E}$ und nicht leerem Symbolraum $\mathbb{W} \cup e$, falls gilt

$$Pr\{J(n+1) = i_{n+1},\, W(n+1) = w \,|\, J(n) = i_n, W(n), \ldots, J(0) = i_0, W(0)\} =$$

$$= Pr\{J(n+1) = i_{n+1}, W(n+1) = w \,|\, J(n) = i_n\}, \qquad i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{E}, w \in \mathbb{W} \cup e. \tag{4.22}$$

Dabei bezeichne e das *leere Symbol* bzw. den Nicht-Fehler. □

Ist der definierte Prozeß unabhängig von n, wird er *homogen* genannt und das Wahrscheinlichkeitsmaß hat den Wert

$$Pr\{J(n+1) = j,\, W(n+1) = w \,|\, J(n) = i\} = (\mathbf{d}_w)_{i,j}, \qquad w \in \mathbb{W} \cup e,\ i, j \in \mathbb{E}. \tag{4.23}$$

Seien $\{T_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ die Zeitpunkte der Ankünfte mit $w \in \mathbb{W}$, also die Zeitpunkte der nicht leeren Ankünfte. Dann gilt

$$Pr\{J(T_{n+1}) = j,\, T_{n+1} - T_n = k,\, W(T_{n+1}) = w_l \,|\, J(T_n) = i\} =$$

$$= \left(\mathbf{d}_e{}^{k-1}\, \mathbf{d}_{w_l}\right)_{i,j}, \qquad w_l \in \mathbb{W},\ i, j \in \mathbb{E},\ k \in \mathbb{N}, \tag{4.24}$$

dabei sind $\mathbf{d}_{w_1}, \mathbf{d}_{w_2}, \ldots, \mathbf{d}_{w_l}, \ldots, \mathbf{d}_{w_k}$ mit $k = |\mathbb{W}|$ Matrizen der Größe $|\mathbb{E}| \times |\mathbb{E}|$, deren Elemente den Wahrscheinlichkeiten für einen Übergang des Typs $w_l \in \mathbb{W}$ entsprechen, während $\mathbf{d}_e$ einen Übergang beschreibt, bei dem das leere Element e ausgegeben wird. Den zugehörigen Beweis findet man in [?]. Offensichtlich sind nur die Matrizen $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ auszutauschen, um den MMBP als DMAP zu interpretieren[4]. In [?] wird der Mittelwert der Zwischenankünfte berechnet, das Ergebnis stimmt mit dem in Kap. ?? formal überein.

[3] Sollten die Jahreszahlen verwundern, sei angemerkt, daß dem Beitrag [?] ein interner Beitrag vorausging, der dem Autor nicht erhältlich war, s. [?].

[4] In dem Beitrag von BLONDIA [?] wird auf den engen Zusammenhang von MMPP und dem zeitkontinuierlichen MAP (Markov Arrival Process) hingewiesen. Es soll auch nicht unerwähnt bleiben, daß in [?] schon darauf hingewiesen wurde, daß der D(B)MAP die zeitdiskrete Form des MMPP mit einschließt.

4.2.2 Einfache Zustandsmodelle für den Funkkanal als diskrete Markovsche Ankunftsprozesse

Werden die fehlerhaften Symbole des Gilbert- bzw. Fritchmann-Modelles als Erneuerungen interpretiert und die korrekten Symbole entsprechend den Zustandsübergängen zugeordnet, bei denen keine Erneuerungen auftreten, so können diese einfachen Zustandsmodelle als spezielle DMAPs interpretiert werden und die Eigenschaften, die für den DMAP hergeleitet wurden, können übernommen werden. So werden beim Modell nach Abb. **??** die Zustandsübergänge aus der Gruppe der "fehlerhaften Zustände" (Gruppe B) heraus durch die Fehlermatrix $\mathbf{d}$ zusammengefaßt, während die Übergänge aus der Gruppe der "Nicht-Fehler-Zustände" heraus (Gruppe A) mit einer zweiten Matrix $\mathbf{c}$ beschrieben werden.

Zur Verdeutlichung werden die Matrizen formal gebildet

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1-q & (1-h)q & 0 \\ r & (1-h)(1-r) & 0 \\ r & (1-h)(1-r) & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & hq \\ 0 & 0 & h(1-r) \\ 0 & 0 & h(1-r) \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Ähnlich Gl. **??** und Gl. **??** läßt sich die bedingte Verteilungsdichtefunktion der Zwischenfehler-Abstände berechnen. Sei $f_{ij}(x) = Pr\{J(n+1) = j,\ X_{n+1} = x \,|\, J(n) = i\}$ die Verteilungsdichtefunktion für den Abstand X_n von einem fehlerhaften Symbol bis zum nächsten und $\{J(n)\}$ der Zustandsprozeß. Die Matrix der bedingten Verteilungsdichtefunktionen ist dann

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \mathbf{d} & \text{falls} \quad x = 1 \\ \mathbf{c}^{\,x-1}\,\mathbf{d} & \text{sonst} \quad x \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Die Wahrscheinlichkeit von k aufeinanderfolgenden fehlerhaften Symbolen kann mit dieser Gl. **??** einfach berechnet werden. Im Vorgriff auf spätere Kapitel soll jedoch angemerkt werden, daß das ebenfalls wichtige Beschreibungsmaß die *Wahrscheinlichkeit von k fehlerhaften Symbolen in n, mit $n > k$* hier nicht sinnvoll approximiert werden kann. Es wird später deutlich, daß die Binomial-Approximation bei diesen einfachen Zustandsmodellen nicht gelingt.

4.2.3 Eigenschaften von semi-Markov-Prozessen

Es gibt zwei Charakteristika, an denen sich Algorithmen zur Fehlererkennung bzw. -korrektur messen lassen müssen. Die gesamte Anzahl von Fehlern in einem Intervall, z.B. einem Datenpaket ist entscheidend für die Leistungsfähigkeit des Fehlerkontroll-Algorithmus[5]. Darüber hinaus ist die Anzahl von hintereinanderliegenden fehlerhaften Symbolen für die Fehlerkontrolle eine wichtige Größe. Insbesondere Faltungsdecoder reagieren auf dieses bursthafte Auftreten von Fehlern sehr empfindlich.

Mit den analytischen Methoden, die im folgenden entwickelt werden, ist eine Abschätzung

[5]Sind gleichermaßen Fehlerkorrektur und Fehlererkennung gemeint, dann wird im folgenden Fehlerkontrolle geschrieben, (engl. error control).

der Leistung von Fehlerkontroll-Algorithmen unter Einbeziehung des zeitvarianten Funkkanals möglich.

Dabei gelten die folgenden Methoden für die einfachen Zustandsmodelle, s. Kap. **??**, gleichermaßen. Insbesondere die Interpretation dieser Modelle als DMAP und die Verwendung des in diesem Zusammenhang hergeleiteten semi-Markov-Kerns ermöglicht die Übertragung der folgenden Eigenschaften, s. Kap. **??** Gl. **??**. Man beachte, daß lediglich die Matrizen $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ auszutauschen sind.

4.2.3.1 Mittelwerte der Zwischenfehler-Abstände

Ähnlich zur Ableitung der bedingten mittleren Zwischenankunftszeit in der Verkehrstheorie kann der bedingte mittlere Zwischenfehlerabstand berechnet werden. Dieses Maß gibt dann, bedingt auf den Zustandswechsel der modulierenden Markov-Kette, die mittlere Distanz bis zum nächsten Fehler an. Formal gilt

$$M_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} t\, f_{ij}(t), \qquad i,j \in \mathbb{E}, \tag{4.27}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{M} = \sum_{t=1}^{\infty} t\ \mathbf{f}(t) = \sum_{t=1}^{\infty} t\ \mathbf{w}^{\,t-1}\ \mathbf{v}. \tag{4.28}$$

Das $k-$te Moment kann leichter mit Hilfe der z-Transformation berechnet werden,

$$\mathbf{M}^{\,(k)} = \frac{d^{(k)}}{dz}\, \mathfrak{Z}\left\{\mathbf{f}(t)\right\}(z)\Big|_{z=1}. \tag{4.29}$$

Diese lautet für den semi-Markov-Kern

$$\mathbf{f}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathfrak{Z}\left\{\mathbf{f}(t)\right\}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{w}^{\,t-1}\,\mathbf{v}\,z^t = (\mathbf{I} - z\,\mathbf{w})^{-1}\ z\,\mathbf{v}. \tag{4.30}$$

Dies führt zu

$$\mathbf{M} \;=\; \mathbf{M}^{\,(1)} \;=\; \left((\mathbf{I}-\mathbf{w})^{-1}\right)^2\ \mathbf{v} \;=\; (\mathbf{I}-\mathbf{w})^{-2}\ \mathbf{v}. \tag{4.31}$$

Ein Element M_{ij} der Matrix $\mathbf{M}$ kann als mittlere Distanz interpretiert werden, nach der der nächste Fehler auftritt. Dieses Maß ist bedingt auf den Zustandswechsel des modulierenden Prozesses von i nach j.

Falls die Anfangsverteilung durch $\underline{p_0}$ beschrieben ist, kann die Wahrscheinlichkeit p_i mit $i \in \mathbb{E}$, daß ein Fehler auftritt unter der Bedingung, daß die Markov-Kette Zustand i erreicht, berechnet werden. Es gilt

$$\underline{p}^{\,T} \;=\; \underline{p_0}^{\,T}\ \mathbf{M} \tag{4.32}$$

mit $\underline{p} = (p_{i\in E})$. Die Berechnung der unbedingten Wahrscheinlichkeit r von mittleren Fehlerabständen ist möglich, wenn $\sum_{i\in\mathbb{E}} p_i$ betrachtet wird. In Matrixschreibweise wird $\underline{e} = (1,1,\ldots,1)^T$ benutzt und es ergibt sich

$$r \;=\; \sum_{i=1}^{m} p_i \;=\; \underline{p_0}^{\,T}\ \mathbf{M}\ \underline{e}. \tag{4.33}$$

Das folgende Beispiel gilt für $m = 4$ Zustände. Wir berechnen die Übergangsmatrix nach dem LCR-Model, Gl. **??** mit der VF $F(\cdot)$ vom Typ Rayleigh mit $\rho = 9dB$ Mittelwert und $f_d/R_t = 0.001$. Wir wählen DPSK-Modulation und für die Abbildung der Zustände auf den Fading-Prozeß $i \to f(i) = 0.13 + 0.18 \cdot i$ mit $i \in \mathbb{E}$ und erhalten

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0.982 & 0.0175 & 0 & 0 \\ 0.00449 & 0.988 & 0.00753 & 0 \\ 0 & 0.00678 & 0.988 & 0.0055 \\ 0 & 0 & 0.00529 & 0.995 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.178 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00244 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5.03 & 2.08 & 1.03 & 1.75 \\ 4.69 & 17.8 & 10.5 & 18.5 \\ 7.41 & 32.2 & 37.7 & 73.5 \\ 10.5 & 46.8 & 59.9 & 152 \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Mit Gl. **??** können wir nun die mittlere Fehlerdistanz bestimmen

$$\mathbf{M}\ \underline{e} = (9.8, 51.5, 150.7, 269.0)^T. \tag{4.35}$$

Für den Fall, daß die modulierende Markov-Kette im Zustand 1 (dem schlechtesten Zustand) startet, ist die mittlere Distanz von einem Fehler zum nächsten 9.8. Falls die moduliernde Kette in Zustand 4 beginnt, tritt der nächste Fehler nach einer mittleren Dauer von 269 Symbolen auf.

Bei dem Entwurf eines Mobilfunksystems kann dieses Maß als Richtlinie verwendet werden, um Interleaving-Tiefen festzulegen. Dazu müssen gemäß Gl. **??** bzw. Gl. **??** relevante Zustände des Kanals festgelegt werden, bei denen Interleaver und Fehlersicherung hinreichend dimensioniert sind. Die entsprechenden stationären Zustandswahrscheinlichkeiten des Funkkanals ergeben die Wahrscheinlichkeit für hinreichende Fehlersicherung.

4.2.3.2 Wahrscheinlichkeit für k-Fehler/Nicht-Fehler in Folge

Die Wahrscheinlichkeit für einen Nicht-Fehler, unter der Bedingung, daß sich die modulierende Markov-Kette von Zustand i nach Zustand j bewegt, ist $w_{ij} = q_{ij}\,(1-\varphi_i)$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler, unter der Bedingung, daß sich die modulierende Markov-Kette von Zustand i nach Zustand j bewegt, ist $v_{ij} = q_{ij}\,\varphi_i$. Also kann die Wahrscheinlichkeit für k Fehler in Folge durch

$$\Big(Pr\{e_n = 1, e_{n+1} = 1, \ldots, e_{n+k-1} = 1,\ J(n+k-1) = j \mid J(n-1) = i\}\Big) \ = \ \mathbf{v}^{\,k} \tag{4.36}$$

ausgedrückt werden. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, eine Sequenz von k Nicht-Fehlern zu generieren, ist

$$\Big(Pr\{e_n = 0, e_{n+1} = 0, \ldots, e_{n+k-1} = 0,\ J(n+k-1) = j \mid J(n-1) = i\}\Big) \ = \ \mathbf{w}^{\,k}. \tag{4.37}$$

Diese Ergebnisse wurden schon in [**?**] mit einem einfacheren Ansatz abgeleitet und sind sinnvoll, um die Erfordernisse eines Faltungscoders abzuschätzen.

4.2.3.3 Fehlerdichten

Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit $p_{i\in\mathbb{E}}$, unter der Bedingung, daß sich die modulierende Markov-Kette in Zustand i befindet, ist

$$\underline{p}^{\,T} = (p_1, \ldots, p_m) = (\gamma_1\varphi_1, \ldots, \gamma_m\varphi_m) = (\gamma_{i\in\mathbb{E}}\,\varphi_{i\in\mathbb{E}}) = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k\,\phi_{k,i},\, i = 1..m\right) = \underline{\gamma}^{\,T}\,\mathbf{\Phi}. \tag{4.38}$$

Die Fehlerdichte d bezeichnet die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit über alle Zustände des Markov-Modells. Es gilt

$$d \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \gamma_k\,\phi_{k,i} \;=\; \underline{\gamma}^{\,T}\;\mathbf{\Phi}\;\underline{e}. \tag{4.39}$$

4.2.3.4 Mittlere Burstlänge, mittlere Nicht-Burstlänge

Sei B die zufällige Länge eines Fehlerbüschels. Die Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Büschel auftritt, ist

$$Pr\,\{B = b\} \;=\; \mathbf{v}^{\,b}. \tag{4.40}$$

Für eine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung benötigen wir noch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Büschel überhaupt, egal welcher Länge, auftritt. Sie ist

$$Pr\,\{B\} \;=\; \sum_{b=1}^{\infty} \mathbf{v}^{\,b} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{v})^{-1}\;\mathbf{v}. \tag{4.41}$$

Somit ergibt sich bei entsprechender Anordnung

$$Pr\,\{B = b \,|\, B\} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{v})\;\mathbf{v}^{\,b}\,\mathbf{v}^{-1}, \tag{4.42}$$

mit $\sum_{b=1}^{\infty} Pr\,\{B = b \,|\, B\} \;=\; \mathbf{I}$. Der Erwartungswert ist dann

$$\mathbf{E}\,[\,B\,] \;=\; \sum_{b=1}^{\infty} b\,Pr\,\{B = b \,|\, B\} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{v})^{-1} \tag{4.43}$$

und die Varianz

$$\mathbf{E}\,\left[\,B^2\,\right] \;=\; \sum_{b=1}^{\infty} b^2\,Pr\,\{B = b \,|\, B\} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{v})^{-3}\;(\mathbf{I} + \mathbf{v})\;\mathbf{v}. \tag{4.44}$$

Entsprechend kann die mittlere Länge G der fehlerfreien Symbole bestimmt werden. Der Erwartungswert ist dann

$$\mathbf{E}\,[\,G\,] \;=\; \sum_{g=1}^{\infty} g\,Pr\,\{G = g \,|\, G\} \;=\; (\mathbf{I} - \mathbf{w})^{-1}\,. \tag{4.45}$$

4.2.3.5 Korrelation der Zwischenfehler-Abstände

Die Korrelation der Zwischenfehler-Abstände kann äquivalent zu der Korrelation der Zwischenankunftszeiten abgeleitet werden, wie sie für den MMPP in [?] dargestellt ist. Die Zwischenfehler-Abstände $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ sind verteilt mit

$$\mathbf{f}\,(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathfrak{Z}\,\{\,\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,\}\,(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n) \tag{4.46}$$

$$= \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} z_k X_k\right\}\right] = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathbf{I} - z_k\mathbf{w}\right)^{-1} z_k\mathbf{v}. \tag{4.47}$$

Nach z_l abgeleitet und z_l zu Eins gesetzt ergibt dieser Ausdruck den Mittelwert des entsprechenden Zwischenfehler-Abstands

$$\prod_{k=1}^{l-1} \left(\mathbf{I} - z_k\mathbf{w}\right)^{-1} z_k\mathbf{v} \left[\left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}\right] \prod_{k=l+1}^{n} \left(\mathbf{I} - z_k\mathbf{w}\right)^{-1} z_k\mathbf{v}. \tag{4.48}$$

Die anderen z_i mit $i = 1..n, i \neq l$ werden zu Eins gesetzt, was im Bereich der beschreibenden Dichten einer Integration über den Definitionsbereich entspricht. Durch diese Operation werden beliebige Abstände dieser Zwischenfehler-Abstände realisiert. h-fache Ableitung und $z_k = 1$ ergibt das h-te Moment von x_k

$$\mathbf{E}\left[\,{X_k}^h\,\right] = h!\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-(h+1)}\mathbf{v} \qquad k \geq 1,\ h \geq 1. \tag{4.49}$$

Nun können wir mit Gl. **??** und $l = 1$ berechnen[6]

$$\mathbf{E}\left[\,X_1\,X_{k+1}\,\right] = \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k-1} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}. \tag{4.50}$$

Analog ergibt sich

$$\mathbf{E}\left[\,X_1\,\right]\ \mathbf{E}\left[\,X_{k+1}\,\right] = \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}. \tag{4.51}$$

Die Matrix der Korrelationen k-ter Ordnung (engl. k-step correlation matrix) ist dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\,\left(X_1 - E\left\{X_1\right\}\right)\left(X_k - E\left\{X_{k+1}\right\}\right)\,\right] &= \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k-1} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v} \\ &- \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v}\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\right)^2 \mathbf{v} \\ &= \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-2}\mathbf{v}\left[\mathbf{I} - \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]\right]\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-1}\mathbf{v}\right]^{k-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{w}\right)^{-2}\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Untersuchungen an Funkkanälen, die mit im Landmobilfunk typischen Werten parametrisiert wurden, zeigen nur sehr geringe Korrelationen. Der Funkkanal eines sich schnell bewegenden Satelliten weist eine hohe Doppler-Frequenz auf. Erwartungsgemäß stellt sich hier eine gewisse Korrelation ein.

[6] In [?] ist Gl. 16 fehlerhaft, statt $-(k+1)$ muß es $k-1$ heißen.

4.2.3.6 Korrelation der Fehler- und Nichtfehler-Abstände

Die Wahrscheinlichkeit, daß k_2 Fehler auf k_1 Nicht-Fehler folgen, ist

$$\Big(Pr\{e_n = 0,\, e_{n+1} = 0,\, \ldots,\, e_{n+k_1-1} = 0,\, e_{n+k_1} = 1,\, e_{n+k_1+1} = 1,\, \ldots$$

$$\ldots,\, e_{n+k_1+k_2-1} = 1,\, J(n+k_1+k_2-1) = j \mid J(n-1) = i\}\Big) \;=\; \mathbf{v}^{\,k_1}\,\mathbf{w}^{\,k_2}. \tag{4.53}$$

Ähnlich können die Verbunddichten beliebiger Ordnung gebildet und die entsprechenden Korrelationen bestimmt werden.

4.2.4 Eigenschaften von endlichen Sequenzen

4.2.4.1 Die Zählfunktion

Neben dem Punktprozeß, der bisher im Vordergrund stand, betrachtet man den Zählprozeß, der die Anzahl der Erneuerungen bzw. Ankünfte oder Fehler in einem Intervall erfaßt. Nach [**?**] gilt für die Anzahl der Erneuerungen im Intervall $(0, t]$

$$N(t) \;=\; \max_{n\in\mathbb{N}_0}\{n : T_n \le t\}, \tag{4.54}$$

falls T_n jeweils die Erneuerungszeitpunkte beschreibt. Im Fall der vorliegenden Prozesse muß jedoch jeweils der Zustandsübergang mit berücksichtigt werden, so daß

$$N_{i,j}(t) \;=\; \max_{n\in\mathbb{N}_0}\{n : T_n \le t\} \qquad i,j \in \mathbb{E} \tag{4.55}$$

nun die Anzahl der Erneuerungen im Intervall $(0, t]$ bezeichnet unter der Bedingung, daß der Markov-Prozeß von Zustand i nach j übergeht. Üblicherweise werden diese Elemente zu Matrizen mit $\mathbf{N}(t) = (N_{i,j}(t))$ mit $i, j \in \mathbb{E}$ zusammengefaßt.

Für diskrete Erneuerungsprozesse kann zu einem Zeitpunkt eine Ankunft erfolgen oder nicht, deshalb ergibt sich mit der C-K-Gleichung

$$Pr\{\mathbf{N}(t+1) \;=\; k\} \;=\; \mathbf{w}\; Pr\{\mathbf{N}(t) \;=\; k\} \;+\; \mathbf{v}\; Pr\{\mathbf{N}(t) \;=\; k-1\}$$

$$0 \le k \le t \in \mathbb{N} \tag{4.56}$$

und den Anfangsbedingungen

$$Pr\{\mathbf{N}(1) \;=\; k\} = \begin{cases} \mathbf{w} & \text{falls } \; k = 0 \\ \mathbf{v} & \text{falls } \; k = 1 \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.57}$$

als Lösung im beschreibenden Bildbereich[7]

$$\mathbf{R}\,(t, z) \;=\; (\mathbf{w} + z\mathbf{v})^t, \tag{4.58}$$

[7]Die direkte Ableitung über $Pr\{\mathbf{N}(t) \;=\; k\} \;=\; \sum_{x=0}^{t} \mathbf{f}(x)^{\,[n]} \;-\; \mathbf{f}(x)^{\,[n+1]}$, analog zu der Ableitung für den zeitkontinuierlichen Fall, führt zum gleichen Ergebnis.

mit $Pr\{\mathbf{N}(t) = k\} = \mathbf{R}(t,k)$ und $\mathbf{R}(t,z) = \mathfrak{Z}\{\mathbf{R}(t,k)\}(t,z)$. Eine allg. Lösung im Zeitbereich läßt sich wegen der fehlenden Kommutativität nicht angeben, s. [?][8]. Für kleine Fehlerzahlen lassen sich Gleichungen berechnen, s. Kap. **??**.

4.2.4.2 Mittlere Anzahl der Fehler in einem Intervall

Der Mittelwert der Ankünfte/Fehler im Intervall $(0,t]$ läßt sich auf einfache Weise berechnen, wenn die abgeleitete Zählfunktion verwendet wird.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{E}\left[\mathbf{R}(t,k)\right] = \sum_{k=0}^{t} k\, Pr\{\mathbf{N(t)} = k\}. \tag{4.59}$$

Es folgt

$$\mathbf{R}(t) = \frac{d}{dz}\mathbf{R}(z,k)\Big|_{z=1} = \sum_{j=0}^{t-1} (\mathbf{w}+\mathbf{v})^j\ \mathbf{v}\ (\mathbf{w}+\mathbf{v})^{t-1-j} = \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{q}^j\ \mathbf{v}\ \mathbf{q}^{t-1-j}. \tag{4.60}$$

Diese Funktion wird auch *Erneuerungsfunktion* genannt. Zur Validierung nehmen wir den Grenzübergang für die Erneuerungsdichte $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t-1)$ vor

$$\mathbf{r} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{r}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{q}^{t-1}\mathbf{v} + \sum_{j=0}^{t-2} \mathbf{q}^j\,\mathbf{v}\,\mathbf{q}^{t-1-j} - \sum_{j=0}^{t-2} \mathbf{q}^j\,\mathbf{v}\,\mathbf{q}^{t-2-j}. \tag{4.61}$$

Der Markov-Prozeß wurde als irreduzibel und rekurrent angenommen, so daß nach Grenzbetrachtungen für Teilsummen schließlich folgt

$$\mathbf{r} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{r}(t) = \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{v}, \tag{4.62}$$

vgl. Gl. **??** für $\mathbf{\Gamma}$. Unabhängig vom initialen Wahrscheinlichkeitsvektor $\underline{p_0}$ erhalten wir also für den Grenzwert der Fehlerdichte

$$\underline{p_0}^T\,\mathbf{r} = \underline{p_0}^T\,\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{v} = \underline{\gamma}^T\,\mathbf{v}, \tag{4.63}$$

was der natürlichen Erwartung entspricht.

4.2.5 Messungen am Fehlerprozeß

Bei der Beschreibung des Fritchmann-Modells, s. Kap. **??**, wurde deutlich, daß eine beliebig genaue Nachbildung der Fehlerabstandsverteilung durch iteratives Nachstellen der Parameter erreicht werden kann. Nun soll der Fehlerprozeß der hier eingeführten verallgemeinerten Gilbert-Elliott-Modelle untersucht werden.

Nach Abb. **??** wurde eine Simulationsumgebung realisiert, um die Eigenschaften des Fehlerprozesses zu untersuchen, mit folgenden Annahmen: Mittelwert der Prozesse $\rho = 6dB$, DPSK-Modulation.

[8] In [?] werden Andeutungen bzgl. der Zählfunktion gemacht, die entscheidenden Gleichungen fehlen jedoch , s. Kap. 5, p. 5.

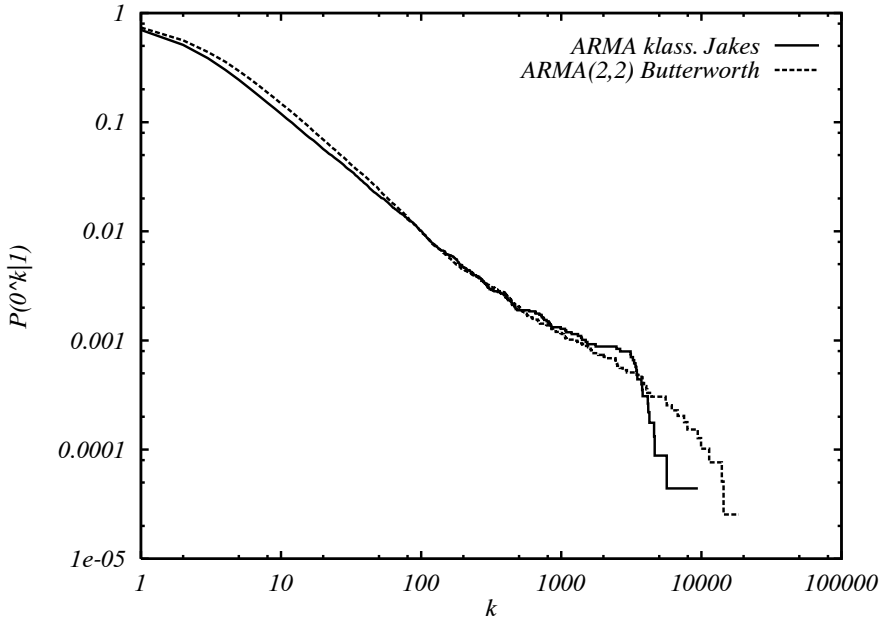

Abb. 4.7 Vergleich ARMA mit Butterworth und ARMA mit klassischem Spektrum

Abb. ?? zeigt den Einfluß des Spektrums des parametrisierenden Prozesses. Es sind die Fehlerabstandsverteilungen der Fehlerprozesse, die von ARMA-Prozessen mit klassischem bzw. streng monoton fallendem Spektrum gewonnen wurden, dargestellt. Dabei wurde das streng monoton fallende Spektrum mit einem Butterworth-Tiefpaß zweiter Ordnung erzeugt, vgl. [?, ?, ?]. Der Prozeß mit dem klassischen Spektrum besitzt durch die Periodizität in der AKF weniger große Fehlerabstände als der Prozeß mit dem streng monoton fallenden Spektrum. Das letzte Spektrum resultiert aus der relativ weiten Ausdehnung des Spektrums über den Frequenzbereich in längeren Fehlerabständen, als die des Prozesses mit dem klassischen Spektrum. Insofern ist eine Auswirkung der Spektren der parametrisierenden Prozesse nur bei großen Fehlerabständen gegeben.

Daß bei einfachen streng monoton fallenden Spektren die Nachbildung des Fehlerprozesses, wie auch die des Spektrums, s. Kap. ??, ohne weiteres möglich ist, soll hier nicht diskutiert werden, sondern lediglich auf [?] verwiesen werden.

Werden zyklische semi-Markov-Modelle verwendet, mit denen, wie schon gezeigt wurde, auch das klassische Jakes-Spektrum approximiert werden kann, werden auch die Abstandsverteilungen der Fehlerprozesse sehr viel ähnlicher. Abb. ?? zeigt den Vergleich mit der Fehlerabstandsverteilung des Musterprozesses mit klassischem Jakes-Spektrum. Dabei wurde $m' = 6$ gewählt. Offensichtlich ist dieser Zustandsraum ausreichend, um die Fehlerabstandsverteilung des Musterprozesses hinreichend genau zu approximieren.

Abb. ?? zeigt die Fehlerabstandsverteilung eines Zustandsmodells mit $m' = 4$ Zuständen. Dieser Zustandsraum reicht offensichtlich nicht aus, um den vorgegebenen Prozeß adäquat zu approximieren. Die Fehlerabstandsverteilungen weichen schon deutlich voneinander ab.

Abschließend zu Kapitel 4 soll eine vergleichende Zusammenfassung vorgenommen werden.

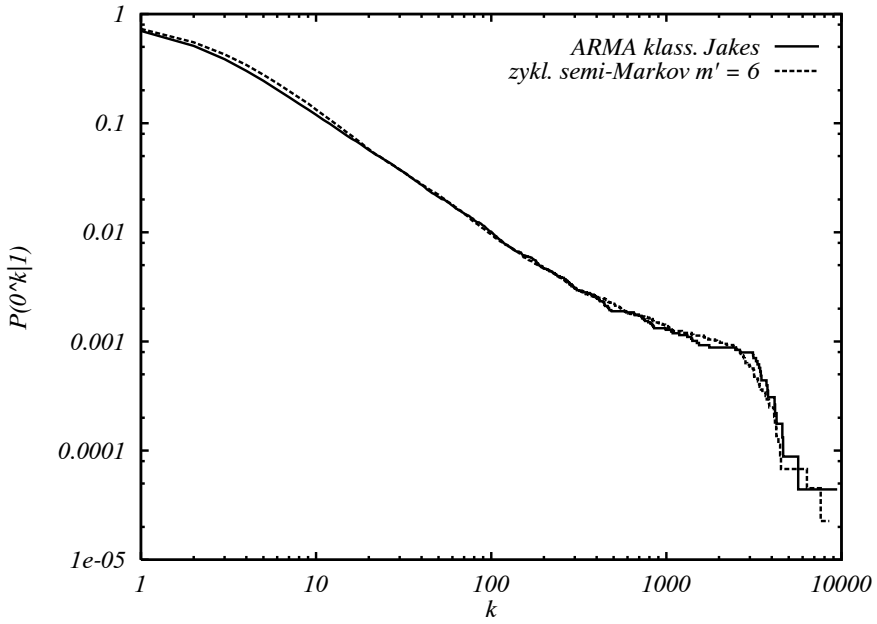

Abb. 4.8 Vergleich ARMA mit klassischem Spektrum und zyklischem semi-Markov-Prozeß

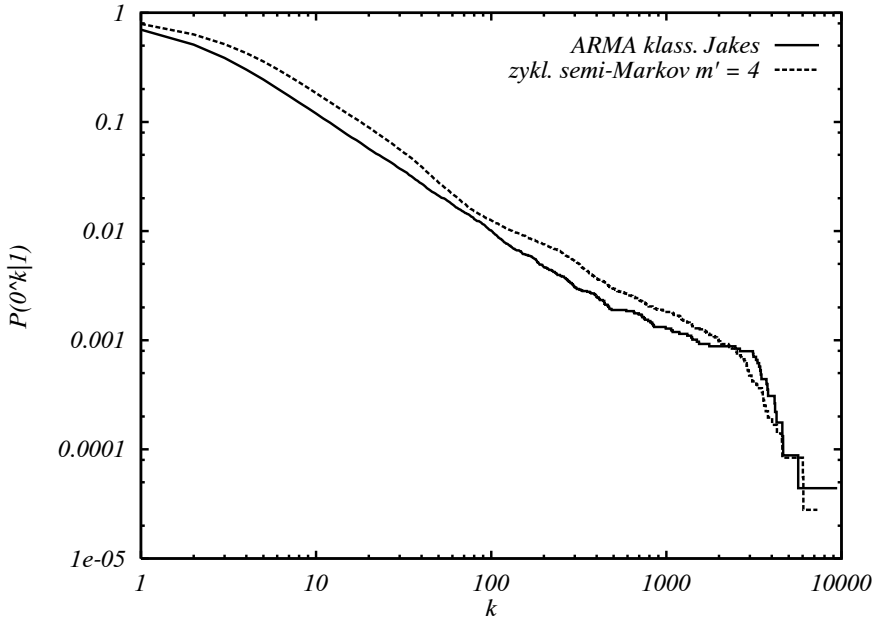

Abb. 4.9 Vergleich ARMA mit klassischem Spektrum und zyklischem semi-Markov-Prozeß

4.2.6 Vergleichende Zusammenfassung

Der Mobilfunkkanal wird im wesentlichen durch seine spektralen Eigenschaften und die auftretenden Störungen charakterisiert, die von der Mehrwegeausbreitung und Abschattung verursacht werden. Seine spektralen Eigenschaften sind durch das Doppler-Spektrum, abhängig von Geschwindigkeit und Wellenlänge, bestimmt.

Das Fritchmann-Modell wird durch die Fehlerabstandsverteilung parametrisiert und liefert

dementsprechend gute Ergebnisse in der Nachbildung der Fehlerabstandsverteilungen. Da bei diesem Modell der zeitvariante Kanalprozeß nicht nachgebildet wird, läßt sich das Spektrum nicht zum Vergleich mit einem Musterprozeß heranziehen. Das Modell weist allerdings einige Nachteile auf:
– schwierige Wahl der Startparameter,
– hoher Aufwand für die Optimierung durch die Gradientenmethode,
– geringe Flexibilität bei wechselnden Szenarien,
– keine Nachbildung des zeitvarianten Kanal-Prozesses.
Vor allem die geringe Flexibilität bei sich ändernden Bedingungen, wie Geschwindigkeit oder Mittelwert des Empfangspegels, ist der Grund dafür, daß das Fritchmann-Modell für Simulationsuntersuchungen größerer Szenarien ungeeignet erscheint. Hier haben die vorgeschlagenen adaptiven Zustandsmodelle, die verallgemeinerten Gilbert-Elliott-Modelle, große Vorteile. Sie können den gegebenen Verhältnissen gut angepaßt werden, da nur die Abbildung der Zustände auf die jeweiligen Bitfehlerwahrscheinlichkeiten modifiziert werden muß.

Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung haben gezeigt, daß durch Markov- und semi-Markov-Modelle mit linearem Zustandsraum das klassiche Doppler-Spektrum nicht zu modellieren ist. Deshalb stellte sich auch die Frage, ob sich bei unterschiedlichen Spektren große Differenzen bezüglich des Fehlerprozesses einstellen. Es wurde der Einfluß des Spektrums von ARMA-Prozessen, die in ähnlicher Struktur in verschiedenen Simulationswerkzeugen eingesetzt werden, auf den Fehlerprozeß untersucht. Dabei hat sich gezeigt, daß der Verlauf der Verteilungsfunktion der Fehlerabstände, die klassische, in der Literatur weit verbreitete Meßgröße, nur für sehr große Fehlerabstände vom Spektrum des parametrisierenden Prozesses abhängig ist. Dies wurde durch einen Vergleich der Fehlercharakteristik der ARMA-Prozesse gezeigt, die das klassische Jakes-Spektrum, bzw. ein einfaches, streng monoton fallendes Spektrum aufwiesen.

Die Tatsache, daß mit Markov-Modellen das klassische Doppler-Spektrum nicht zu modellieren ist, gab zu Untersuchungen anderer Zustandsmodelle Anlaß. Es wurden semi-Markov-Modelle vorgeschlagen, die eine zyklische Struktur bzgl. ihres Zustandsraumes aufweisen. Dabei verdoppelt sich der Zustandsraum. Es konnte gezeigt werden, daß mit diesen Prozessen das klassische Jakes-Spektrum sehr viel besser nachgebildet werden kann. Auch die Fehlercharakteristik konnte durch diese Modelle verbessert werden. Nun konnte auch bei größeren Fehlerabständen die Verteilungsfunktion der Fehlerabstände gut angenähert werden. Jedoch muß die jeweilige Anwendung zeigen, ob sich der vermehrte Aufwand lohnt. Es soll jedoch angemerkt werden, daß mit semi-Markov-Modellen die mathematische Behandlung des Fehlerprozesses als Markov-Modulierten-Binomial-Prozeß mit den hier vorgestellten Verfahren nicht möglich ist.

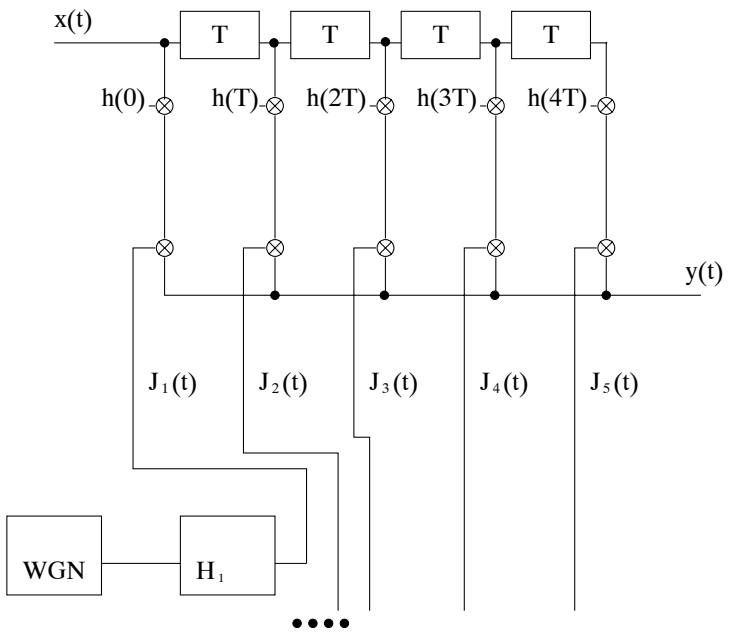

Abb. 4.10 Modell für einen frequenzselektiven Funkkanal

4.3 Modelle für frequenzselektive Mobilfunkkanäle

Die in Kap. ?? und ?? beschriebenen frequenzselektiven Funkkanäle werden in diesem Kapitel noch einmal im Zusammenhang mit Zustandsmodellen betrachtet.

Bisher wurden die verschiedenen physikalischen Pfade als zu einem Modellpfad zusammenfaßbar angesehen, wie man es i.a. für nicht frequenzselektive Funkkanäle vornimmt, da die Verzögerungen der einzelnen physikalischen Pfade kleiner als die betrachtete Symbollänge sind. Dieser eine Modellpfad wurde durch Zustandsmodelle nachgebildet. So ergab sich eine multiplikative Störung für das Basisbandsignal.

Für den Fall des frequenzselektiven Funkkanals soll nun jeder einzelne Pfad durch ein Zustandsmodell nachgebildet werden. Dies impliziert im Fall von unabhängigen Zustandsmodellen, wie sie hier ausschließlich betrachtet wurden, die US-Annahme, da alle Pfade in der Zeitveränderlichkeit als unabhängig angenommen wurden. Abb. ?? zeigt die Struktur, vgl. auch Abb. ?? und Abb. ??.

In einigen Publikationen, z.B.[?], werden komplexe Gauß-Prozesse eingesetzt, um die Zeitvariation der einzelnen Pfade zu modellieren. Gauß-Prozesse können in gleicher Weise nach den in den vorigen Kapiteln vorgeschlagenen Algorithmen diskretisiert werden und anschließend, analog zum Tapped-Delay-Line Modell, s. Kap. ??, Abb. ??, über zeitliche Verzögerungsglieder zusammengefaßt werden. Dabei ist das Power-Delay-Profile in gleicher Weise zu modellieren, wie beim Tapped-Delay-Line Modell, s. Gl. ??.

Im Zusammenhang mit einem adäquaten Empfänger-Modell, wie es im nächsten Kapitel vorgestellt wird, ergibt sich dann eine neuartige Relation der Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten des Empfängers bezogen auf den Gesamtzustand des Kanals. Besteht der Kanal nur aus einem Pfad, d.h. einem einzigen Zustandsmodell, ist diese Relation eine diskretisierte

Variante der Fehlerfunktion. Besteht der Kanal aus mehreren Zustandsmodellen, ist jede einzelne Zustandskombination zu ermitteln und die dieser Kombination entsprechende Symbolfehlerwahrscheinlichkeit zu bestimmen.

(Zustands-) Modelle für Empfänger

Unter der Annahme, daß der Funkkanal nur durch additives weißes Gauß'sches Rauschen und nicht-frequenzselektives Fading gestört wird, kann die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit i.a. einfach bestimmt werden, s. [?]. Der Zusammenhang zwischen der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit und dem Zustand des frequenzselektiven Funkkanals ist dagegen äußerst komplex, da Intersymbolinterferenz entstehen kann. Um diese zu eliminieren, müssen im Empfänger Entzerrer vorgesehen werden. Bei der Betrachtung von mathematisch-analytischen Zusammenhängen begnügte man sich mit der Betrachtung von Extremfällen: Optimale Entzerrung wurde als *Matched Filter Bound* untersucht, [?, ?], während unterlassene Entzerrung als anderes Extrem auch berechenbar ist und in [?] betrachtet wurde.

Im folgenden soll ein neuer auf Zustandsmodellen basierender Ansatz eingeführt werden, der auf Betrachtungen der obengenannten Extreme verzichtet und auch die nicht-linearen Vorgänge der Entzerrungsalgorithmen einschließt. Dabei kann auf die stochastische Simulation nicht vollständig verzichtet werden, jedoch können die Ergebnisse, d.h. kanalzustandsabhängigen Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten weitgehend unabhängig von der Doppler-Frequenz des frequenzselektiven Kanals und des mittleren empfangenen Pegels verwendet werden, nachdem das Zustandsmodell parametrisiert wurde.

Dieser Ansatz ermöglicht die Untersuchung eines Kommunikationsszenarios mit mehreren hundert Teilnehmern unter Beachtung der evtl. frequenzselektiven Eigenschaften des Funkkanals, s. Kap ??.

5.1 Der Empfänger

Der Optimalempfänger wurde für uncodierte Übertragungen im Jahr 1972 von FORNEY hergeleitet. Dieser *Maximum Likelihood* Empfänger besteht aus dem *Whitening Matched Filter* gefolgt von einem Abtaster mit der Rate $1/T$ und dem *Maximum Likelihood Sequence Estimator* - Entzerrer (MLSE-Entzerrer) der die Symbole mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus decodiert, s. [?], und dabei die Maximierung der sog. Likelyhood-Metrik der gesamten empfangenen Sequenz rekursiv löst. Deshalb steigt der Aufwand nicht mehr exponentiell mit der Länge der Sequenz, sondern nur noch exponentiell mit der Größe des Kanalgedächtnisses.

Um die Charakteristika des Funkempfangs festzustellen, wurde beispielhaft ein GSM-Empfänger aufgebaut, orientiert an den oben geschilderten Entwurfskriterien.

Im folgenden werden die Komponenten der Basisbandsignal-Verarbeitung dargestellt. Ausführlich ist dieses Projekt in [?] beschrieben, es orientiert sich an der Veröffentlichung von

A. Baier [?].

5.2 Struktur eines GSM-Empfängers

Der Empfänger läßt sich grob in fünf Abschnitte unterteilen, Abb. ??. Zunächst werden die empfangenen Signale mit Hilfe der erweiterten Trainingssequenz eines speziellen Datenpaketes (Synchronisation Burst) auf das Rahmenformat synchronisiert. Anschließend findet die bitgenaue Synchronisation mit Hilfe der Trainingssequenz statt. Im nächsten Schritt wird mit der Trainingssequenz die Kanalimpulsantwort geschätzt. Im vierten Teil des Empfängers wird das Signal nach Maßgabe der geschätzten Kanalimpulsantwort mit dem Viterbi-Algorithmus entzerrt. Im letzten Teil wird die Phase zurückgewonnen und aus dieser Information werden dann die einzelnen Symbole decodiert.

Durch stochastische Simulation sollen Leistungskenngrößen dieses Empfängers ermittelt werden, um in Kap. ?? die Parametrisierung von Zustandsmodellen zu ermöglichen. Der Kanal wird durch komplexe Gauß-Prozesse gebildet, die durch die in den zurückliegenden Kapiteln berschiebenen Zustandsmodelle nachgebildet werden. Parametrisiert wird das Modell nach COST-207, vgl. Kap. ??, dabei werden die Überlegungen von Kap. ?? berücksichtigt; es wird für jeden Pfad ein unabhängiges Zustandsmodell verwendet.

Als Datensequenz wird ein Paket vom Typ *Normal-Burst* gebildet, der eine Midambel aufweist, die die Trainingssequenz darstellt. Dieser Burst wird nach dem GMSK-Modulationsverfahren moduliert, s. Kap. ?? und dann zur Initialisierung der Simulationsmodule 'Synchronisation', 'Korrelation' und der 'Autokorrelation' genutzt. Die so gewonnenen Daten werden mittels des Kanalmodells gestört. Zusätzlich wird weißes Gauß'sches Rauschen hinzugefügt, so daß ein variables Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) eingestellt werden kann. Die dann folgenden Module stellen den Empfänger dar. Zunächst folgt der Eingangstiefpaß, der einen Teil des Rauschens eliminiert. Anschließend wird das Signal synchronisiert. Nach

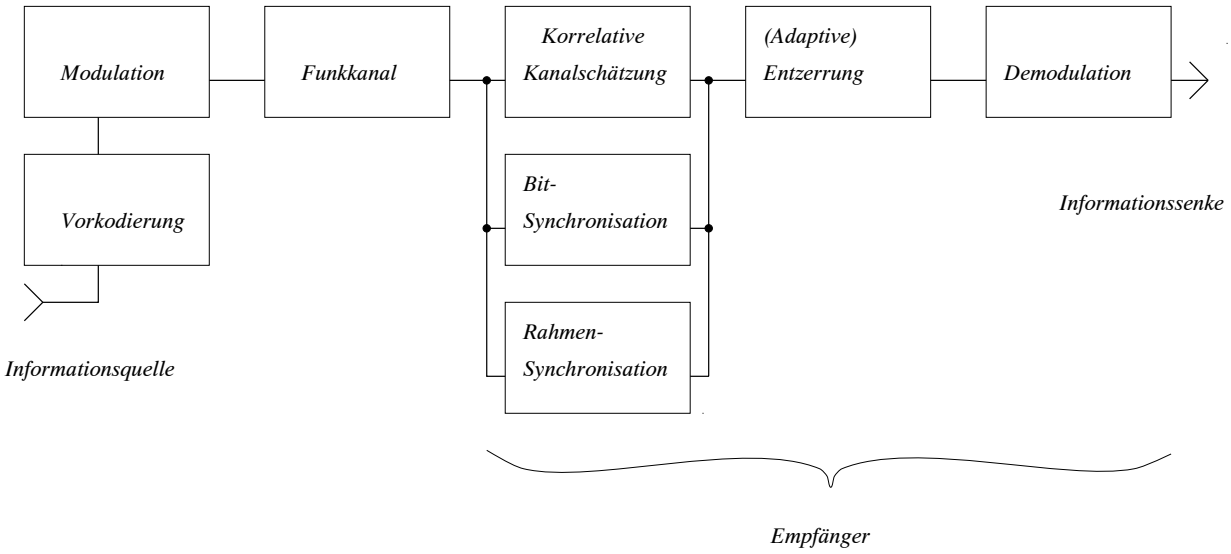

Abb. 5.1 Informationsfluß in einem Empfänger

der Kanalschätzung folgt der adaptive Entzerrer mit dem Viterbi-Algorithmus. Zuletzt wird das so gewonnene Signal wieder demoduliert. Die wesentlichen Module werden im folgenden genauer dargestellt.

5.2.1 GMSK-Modulationsverfahren

In den meisten Mobilfunksystemen wird eine Sonderform der Phasenmodulation verwendet. Bei der Wahl des Modulationsverfahrens ist die spektrale Effizienz, d.h. die benötigte Bandbreite für die zu übertragende Information, von Bedeutung. Im GSM wird das *Gaussian Minimum Shift Keying* (GMSK)-Verfahren verwendet, eine Sonderform des *Minimum Shift Keying* (MSK), das mit einem sehr schmalen Frequenzband auskommt. Dabei kann das MSK-Verfahren als eine Form des *Offset Quadrature Phase Shift Keying* (OQPSK), bzw. *Continuous Phase Shift Keying* (CPSK) interpretiert werden, s. [**?**]. Beim GMSK-Verfahren ist dem Modulator ein Gauß-Tiefpaß vorgeschaltet, der unerwünschte hochfrequente Anteile des Signalspektrums dämpft. Das Symboldauer-Bandbreite-Produkt wird mit BT=0.3 gewählt. Mit T=3.6924 μs ergibt sich die Bandbreite des Filters zu B=81247 kHz. Ein weiteres Gütekriterium für ein Modulationsverfahren ist die zur Verfügung stehende Leistung nach Eingangsfilterung. Hierbei ist wichtig, daß die gesamte Leistung innerhalb einer möglichst geringen Bandbreite zur Verfügung steht. Andernfalls wird mit einem schmalbandigen Eingangsfilter ein zu großer Anteil der Nutzleistung herausgefiltert oder das Rauschen kann bei einem breitbandigen Eingangsfilter nicht genügend gedämpft werden. Beide Alternativen führen zu einer erhöhten Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Auch in dieser Hinsicht ergibt das GMSK-Verfahren ein vorteilhaftes, schmales Signalspektrum.

5.3 Korrelative Kanalschätzung

Auch bei einem adaptiven Empfänger, bei dem die Kanalimpulsantwort mehrfach im Burst nachgeführt wird, muß zunächst die Kanalimpulsantwort geschätzt werden. Zunächst wird aus der Mustertrainingsequenz die Autokorrelationfunktion bestimmt.

Bild **??** zeigt die Autokorrelationsfunktion $C_{zz}(\tau) = \mathbf{E}\left[z_t^* \, z_{t+\tau} \right]$ einer der acht möglichen Trainingssequenzen $\{z_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Desweiteren steht aus der Synchronisation die Kreuzkorrelation $C_{z\hat{z}}(\cdot)$ der Mustertrainingssequenz z_t und der empfangenen Trainingssequenz $\hat{z}_t$ zur Verfügung. Zwischen diesen beiden Funktionen gilt unter Berücksichtigung der Kanalimpulsantwort $h(\cdot)$ die Beziehung

$$C_{z\hat{z}}(t) \;=\; C_{zz}(t) * h(t), \tag{5.1}$$

wobei $*$ die Faltungsoperation bedeuted. Dabei werden bei vierfacher Abtastung pro Symbol jeweils die Funktionen $C_{z\hat{z}}(t)^{[1]}$, $C_{z\hat{z}}(t)^{[2]}$, $C_{z\hat{z}}(t)^{[3]}$, $C_{z\hat{z}}(t)^{[4]}$ gebildet, die sich aus den jeweils ersten, zweiten, dritten und vierten Abtastwerten ergeben. Dann wird die Funktion mit dem höchsten Maximalwert selektiert, deren Maximum dann als zeitlicher Referenzpunkt gilt. Auf diese Weise wird eine Synchronisation mit einer Genauigkeit von $T/4$ realisiert, wobei

T die Symboldauer darstellt. Zur Berechnung von $\tilde{h}(\cdot)$, des Schätzers von $h(\cdot)$, wird das Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren eingesetzt, [?].

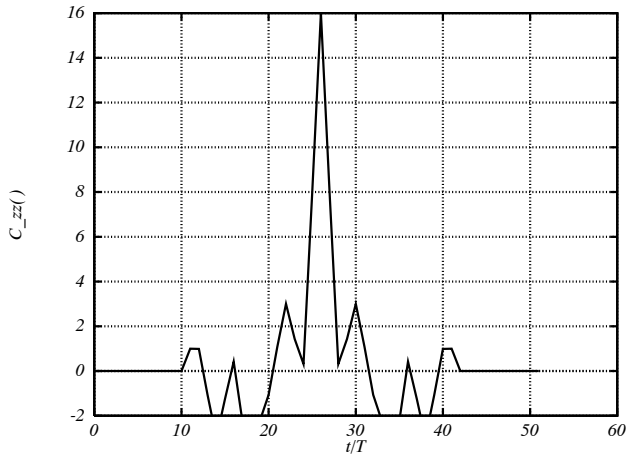

Abb. 5.2 Autokorrelation einer der 8 möglichen Trainingssequenzen im Normal-Burst

Bei herkömmlichen Entzerrern (engl. Equalizer) wird das empfangene Signal mit der Inversen der geschätzten Kanalimpulsantwort gefaltet; auf diese Weise wird der sog. *Matched-Filter Empfänger* realisiert. Bewegt sich der Sender oder der Empfänger mit hoher Geschwindigkeit, so ändert sich die Kanalimpulsantwort sehr schnell und die Kanalschätzung ist fehlerhaft. Entsprechend ergibt sich für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit eine deutliche Erhöhung zu den Rändern des Bursts, da sich die Trainingssequenz in der Mitte befindet, vgl. die obere Kurve in Abb. **??**. Dabei wurde GMSK mit einem Zeitbandbreiteprodukt BT von 0.3 verwendet, wie es der Standard [?, ?] empfiehlt. Die Bitrate des Systems beträgt 1/T = 270.83 kbit/s, jeder Burst enthält 116 Datenbits und 26 Bits in der Trainigssequenz, E_b/N_0=14dB, v=75m/s.

Durch adaptive Entzerrer kann die geschätzte Kanalimpulsantwort entsprechend der Änderung des Kanals nachgeführt werden.

5.4 Adaptive Entzerrer, iterative Kanalschätzung

Algorithmen zur Entzerrung von Intersymbolinterferenzen für bandbegrenzte dispersive Kanäle lassen sich in zwei generelle Typen, lineare und nichtlineare Entzerrer, unterteilen, [?]. Auch die Strukturen zur Realisierung dieser verschiedenen Entzerrertypen lassen sich in zwei Sparten teilen. Diese sind die transversal- und die lattice-Strukturen. Transversalfilter sind Übertragungssysteme mit einer endlichen Impulsantwort (FIR Filter). Für jede dieser Strukturen gibt es eine Reihe von Algorithmen zur adaptiven Regelung der Entzerrerparameter. Ausführliche Beschreibungen und vergleichende Untersuchungen finden sich in [?] und [?].

Verbreitet sind der *Decision Feedback Equalizer* (DFE) und die *Maximum Likelihood Sequence Estimation* (MLSE), dabei kann der DFE sowohl als lattice-Struktur wie auch als transversal-Struktur realisiert werden. Beide Entzerrer sind als *nicht lineare Entzerrer* gerade bei stark gestörten Übertragungskanälen sehr leistungsfähig; der MLSE ist leichter zu realisieren, dagegen ist der DFE robuster.

Für die TDMA Rahmen, wie sie im GSM realisiert sind, sind beide Typen nahezu gleich gut geeignet. Abbildung **??** zeigt die Struktur des adaptiven Entzerrers in Verbindung mit der

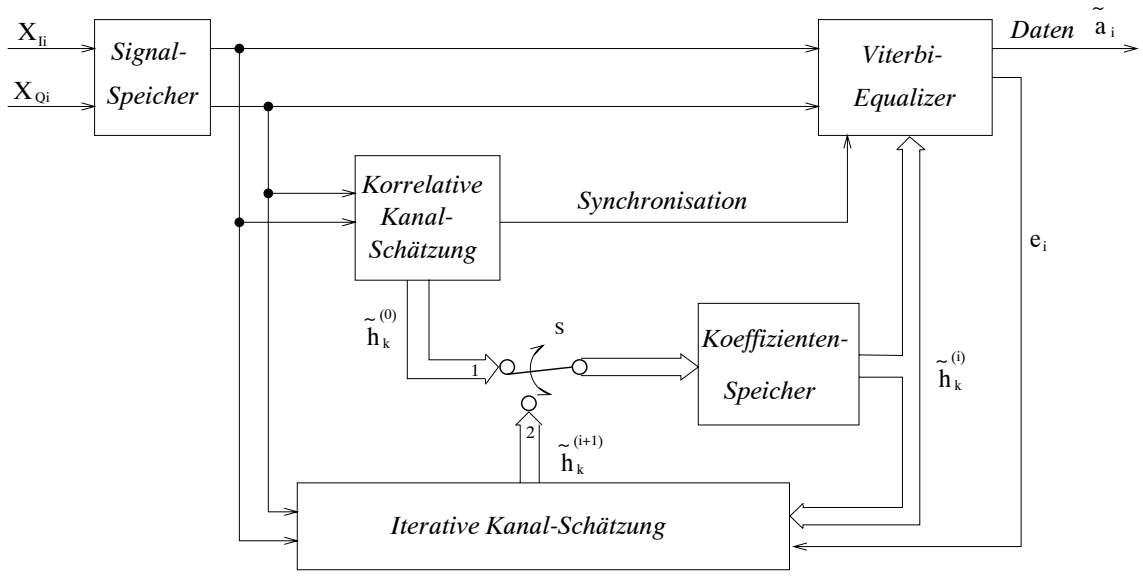

Abb. 5.3 Struktur des nichtlinearen adaptiven Entzerrers mit Maximum Likelihood Sequence Estimation (MLSE)

Kanalschätzung und dem Viterbi-Algorithmus. Dazu werden zunächst die Empfangsdaten des gesamten Bursts gespeichert. Mit Hilfe der Trainingssequenz wird bei Schalterstellung 1 die Kanalimpulsantwort $\tilde{h}_k^{(0)}$ geschätzt. Die Parameter der Kanalschätzung werden dem Entzerrer zugeführt. Gleichzeitig werden die Parameter der iterativen Kanalnachführung weitergeleitet. Nun wird der Schalter auf Stellung 2 umgelegt, und die Parameter des Entzerrers werden nun mit Hilfe eines Fehlersignals e_i nachgeführt, das sich wie folgt berechnet

$$e_i \;=\; x_{i-M} \;-\; \sum_{k=0}^{K} \tilde{a}_{i-M-k}\; \tilde{h}_k^{(i)^{-1}}. \tag{5.2}$$

Dabei bedeuten

- e_i Fehlersignal, das vom Viterbi-Algorithmus an die iterative Kanalnachführung weitergeleitet wird,
- x_i empfangenes Signal bestehend aus Inphase- und Quadraturkomponente,
- K Länge der Kanalimpulsantwort,
- M Delay (gibt die Verzögerung an, mit der die Parameter nachgeführt werden),
- $\tilde{a}_i$ Signal nach dem Viterbi-Algorithmus.

Mit Hilfe dieses Fehlersignals werden bei der iterativen Kanalnachführung neue Parameter für die Kanalimpulsantwort nach Gleichung

$$\tilde{h}_k^{(i+1)} \;=\; \tilde{h}_k^{(i)} \;+\; 2\,\Delta\; e_i\; \tilde{a}^*_{i-M-k}, \qquad k = 0..K \tag{5.3}$$

berechnet. Dabei stellt Δ einen Konvergenzfaktor dar, der variabel eingestellt werden kann. Dieser Faktor bestimmt die Adaptionsrate, jedoch auch die Stabilität, [**?**]. Es gibt einige theoretische Überlegungen, die sich an der Kovarianzmatrix des Signals orientieren. Hier wurde $\Delta = 0.03$ gewählt. Abb. **??** zeigt die Verbesserung durch die adaptive Entzerrung, die an den Rändern des Bursts deutlich erkennbar ist. Der Viterbi-Equalizer wurde mit einer Tiefe von 5 realisiert. Die Ergebnisse sind mit denen in [**?**] vergleichbar. Dieser Algorithmus wird auch *stochastic gradient algorithm* genannt.

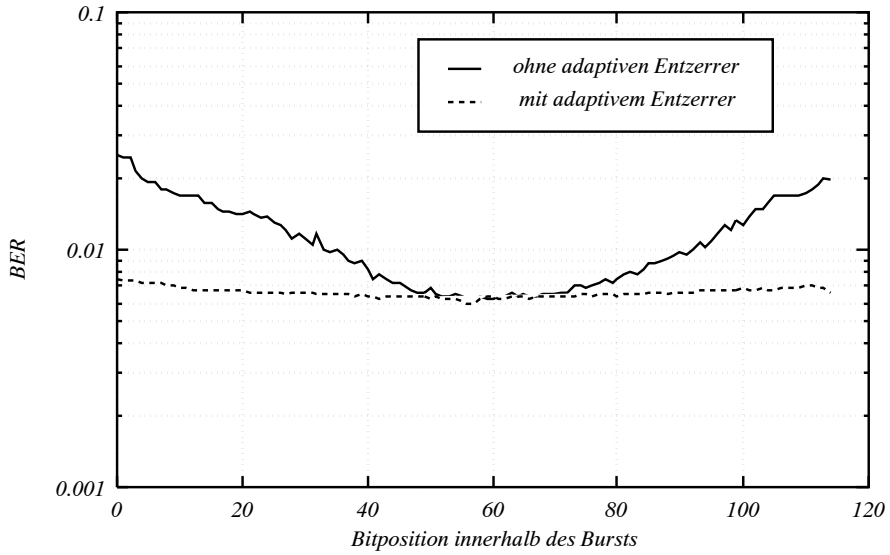

Abb. 5.4 Bitfehlerwahrscheinlichkeit (BER = bit error ratio) in Abhängigkeit von der Position des Bits innerhalb des Bursts

5.5 Zustandsmodelle für den Empfänger

Aus Gründen der Komplexität und der Laufzeit kann in umfangreicheren stochastischen Simulationsuntersuchungen, bei denen viele Kommunikationsbeziehungen betrachtet werden sollen, kein vollständiges Empfängermodell eingebunden werden.

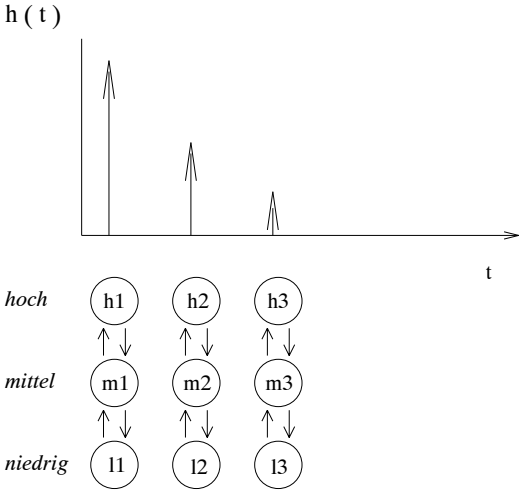

Abb. 5.5 Zustandsmodell des Empfängers

Deshalb ist es sinnvoll, einen Zusammenhang zwischen dem Kanalzustand und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit, bzw. der Bitfehlerverteilung zu entwickeln. Die bisher abgeleiteten Modelle ermöglichen uns, einige grundsätzliche Vereinfachungen in der Modellierung frequenzselektiver Funkkanäle und adäquater Empfängermodelle vorzunehmen.

In Abb. **??** ist ein mögliches Zustandsmodell für einen Dreiwege-Kanal mit drei möglichen Zuständen je Pfad beispielhaft dargestellt.

Dabei sind die einzelnen Pfade des Kanals als voneinander unabhängig angenommen, es wird hier also auf die WSSUS-Annahme zurückgegriffen. Ausgehend von diesem Zustandsmodell soll die Charakteristik des Empfängers durch einen algebraischen Zusammenhang modelliert werden. Damit lassen sich sechs grundsätzliche Kriterien für den Kanalzustand denken:

1. Der *Betrag* der komplexen Impulsantwort ist ein Maß für die Empfangsfeldstärke. Es ist zu erwarten, daß die Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit steigender Empfangsfeldstärke zurück-

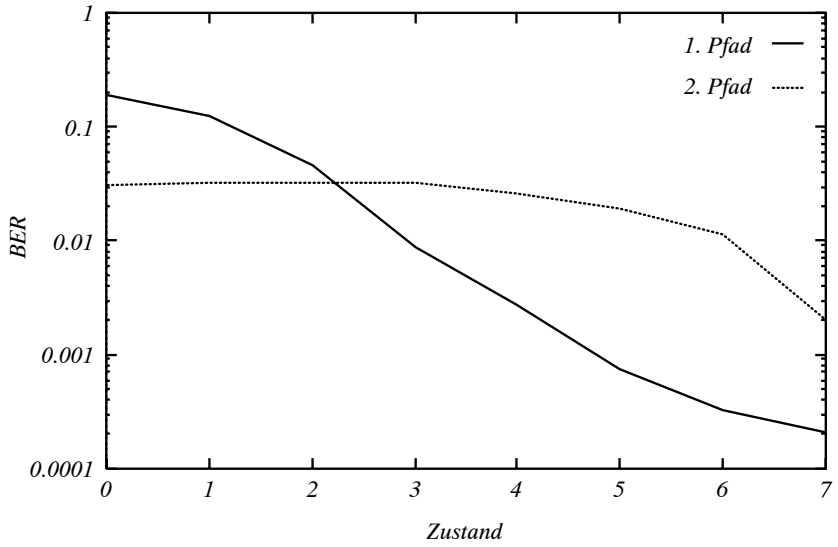

Abb. 5.6 Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort der ersten beiden Pfade

geht, da das Signal besser empfangen wird.
2. Im GSM wird die Modulationsart GMSK verwendet. Die zu übertragende Information beeinflußt bei dieser Modulationsart die Phase, nicht jedoch den Betrag. Von daher ist keine Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit von der *Änderung des Betrages* zu erwarten.
3. Es ist sinnvoll die *Phase* bzw.
4. die *Änderung der Phase* in der Auswirkung auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit zu untersuchen.
5. Desweiteren sollte der Einfluß des *Signal-zu-Rauschverhältnis* (SNR) und
6. der *Geschwindigkeit* untersucht werden.

In [**?**] wurden die Einflüsse der einzelnen Kanalparameter auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit durch stochastische Simulation untersucht. Hier soll nur das wichtigste Ergebnis dargestellt werden. Der *Betrag der komplexen Kanalimpulsantwort der einzelnen Pfade* ist die entscheidende Größe für die sich einstellende Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Dieses Kriterium dominiert die obengenannten Kriterien 2 bis 4, wobei natürlich die Kriterien 5 und 6 berücksichtigt werden müssen.

In Abb. **??** ist das Bitfehlerverhalten (BER=bit error ratio) als Maß für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für den 1. und 2. Pfad der Kanalimpulsantwort dargestellt. Es wird deutlich, daß das Bitfehlerverhalten vom 1. Pfad stärker als vom 2. Pfad abhängig ist.

Üblicherweise wird man versuchen, die Abbildung

$$\phi : \mathbb{E} \rightarrow (0,1) \tag{5.4}$$

in Form einer Tabelle abzuspeichern, da hier im konkreten Fall $|\mathbb{E}| = 8$ und allg. $\mathbb{E}$ als endlich angenommen wurde. Einen algebraischen Zusammenhang zwischen dem Kanalzustand und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit kann man gemäß Abb. **??** wie folgt herstellen

$$\phi(i) = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{2^{\frac{0.1SNR}{dB}}} \, 20^{1.2\, erfc(0.5\,(i-3))} \qquad i \in \mathbb{E}. \tag{5.5}$$

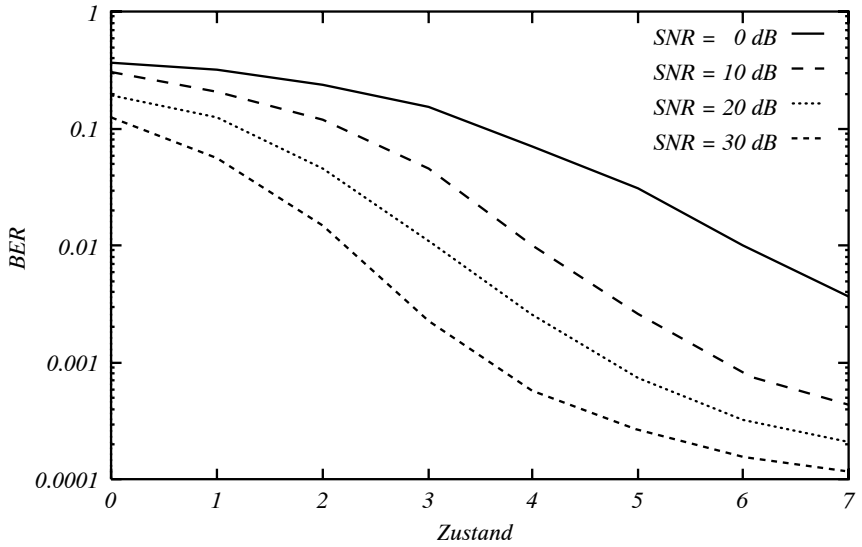

Abb. 5.7 Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort des ersten Pfades mit SNR als Parameter

Dabei bedeuten
SNR Signal-zu-Rauschverhältnis,
i Zustand des Betrages des 1. Pfades der Kanalimpulsantwort.

In Abbildung **??** ist die Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit vom Zustand des 1. Pfades für verschiedene Signal-zu-Rauschverhältnisse (SNR) dargestellt. Der Kurvenverlauf der vier Kurven ist sehr ähnlich, sie sind nur gegeneinander verschoben. Bild **??** zeigt die gleiche Abhängigkeit mit der Geschwindigkeit als Parameter. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei gleichem Kanalzustand nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Dies ist leicht einzusehen, da die Geschwindigkeit im verwendeten Zustandsmodell für den Funkkanal über die Übergangswahrscheinlichkeiten in das Modell eingeht. Hier liegt jedoch eine quasi-statische Betrachtungsweise vor: Innerhalb einzelner Zustände ist keine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit vorhanden.

In Abbildung **??** ist die Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit vom 1. und 2. Pfad der Kanalimpulsantwort zusammen dargestellt. Die eingezeichneten Linien verbinden Zustände gleicher Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Zwischen den Linien ist der Übergang der Bitfehlerwahrscheinlichkeit kontinuierlich. In dieser Abbildung ist sehr deutlich der unterschiedliche Einfluß des 2. Pfades auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des 1. Pfades zu erkennen. Besitzt der 1. Pfad der Kanalimpulsantwort einen großen Betrag, so hat der 2. Pfad nur einen sehr geringen Einfluß auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Dieses erkennt man an dem eher horizontalen Verlauf der Linie für $BER = 0.0005$. Der Einfluß des 2. Pfades nimmt mit abnehmenden Betrag des 1. Pfades zu. Insbesondere steigt der Einfluß des 2. Pfades, wenn dessen Betrag größer ist als der des 1. Pfades. Man beachte, daß der Mittelwert des i-ten Pfades bei den nach COST-207 spezifizierten Funkkanälen stets größer als der des $i+1$-ten Pfades ist[1]. Den stärksten Einfluß hat jeweils der Pfad mit dem größten

[1]Der Zustandsraum des verwendeten Zustandsmodells deckt dann also im $i+1$-ten Pfad einen geringeren Bereich als im i-ten Pfad ab, so daß gleiche Zustandsindizes nicht gleichen Betrag bedeuten. Es soll aus-

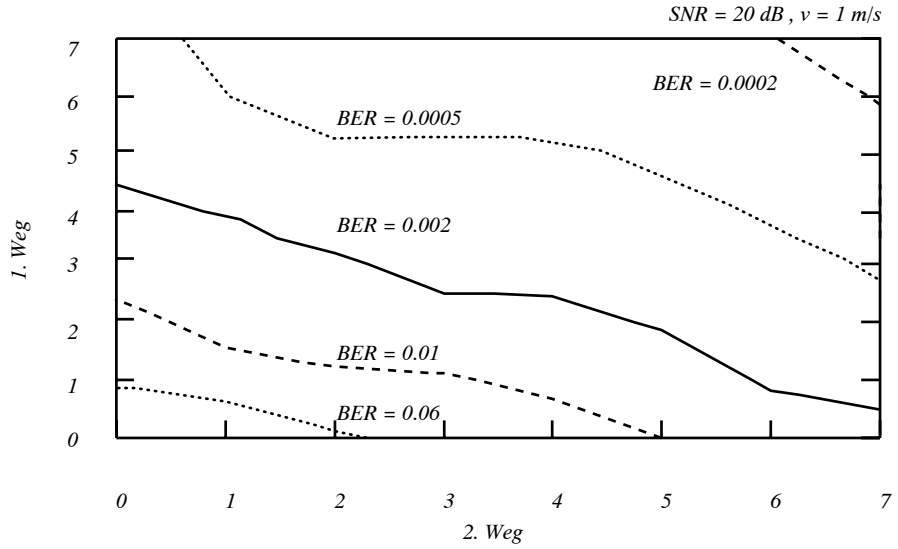

Abb. 5.8 Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort der ersten beiden Pfade

Betrag während der Trainingssequenz. Durch die längeren Laufzeiten weiterer Pfade und die damit verbundene größere Dämpfung wird der mögliche Einfluß weiterer verzögerter Pfade immer geringer. In den Geländetypen 'Typical Urban' und 'Bad Urban' haben die weiteren Pfade praktisch keinen Einfluß. Anders sieht es im Geländetyp 'Hilly Terrain' aus. Hier treten in der Kanalimpulsantwort sehr viele Pfade auf, wobei auch die Pfade mit großen Verzögerungen große Beträge aufweisen können.

In Bild **??** ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort exemplarisch für die Pfade 2 und 5 dargestellt. Während der 2. Pfad mit geringer Verzögerung und relativ hoher Intensität noch, wenn er einen hohen Betrag aufweist, zu einer geringeren Bitfehlerwahrscheinlichkeit führen kann, erhöht sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit zunehmendem Betrag des 5. Pfades. Hier wird deutlich, daß es zu keiner Synchronisation auf den 5. Pfad kommt, da dieser Pfad über die starke Dämpfung, bzw. im Modell die abfallende Kanalimpulsantwort, zu schwach ist. Dagegen kann es bei Pfaden mit geringer Verzögerung bei großem Betrag dieser Pfade zu einer Synchronisation auf diese Pfade kommen. Dann verringert sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit der Größe des Betrages. Dies zeigt die Kurve für den 2. Pfad.

Auch hier wird die Abbildung

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{E} \times \mathbb{E} \ldots \times \mathbb{E}}_{b \text{ mal}} \rightarrow (0,1) \tag{5.6}$$

in Form einer Tabelle abgelegt.

Dieser formale Zusammenhang ist von Bedeutung, wenn Systeme mit den oben beschriebenen Algorithmen innerhalb mehrerer Kommunikationsbeziehungen untersucht werden sol-

drücklich darauf hingewiesen werden, daß die Parametrisierung des Zustandsmodelles nicht statisch über Pegel erfolgt sondern Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Pegels erfaßt und insofern die oben geschilderten Unabhängigkeiten begründet.

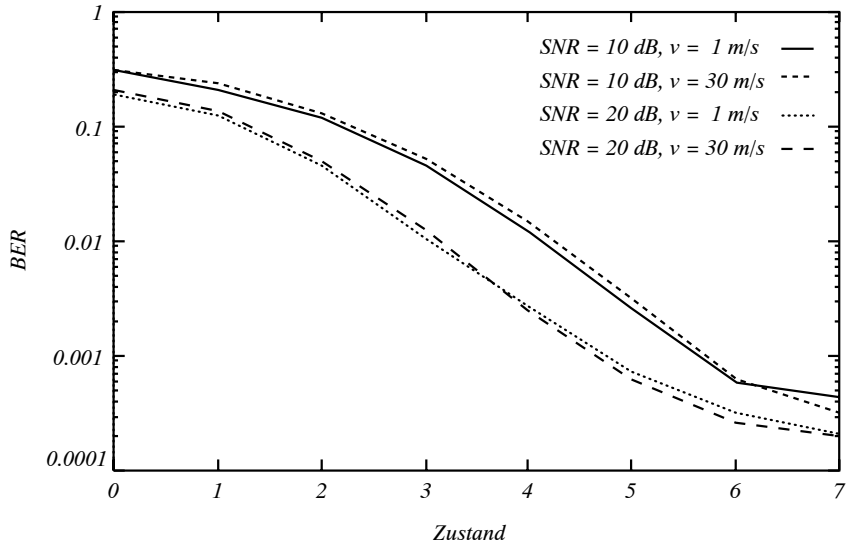

Abb. 5.9 Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort des ersten Pfades mit der Geschwindigkeit und SNR als Parameter

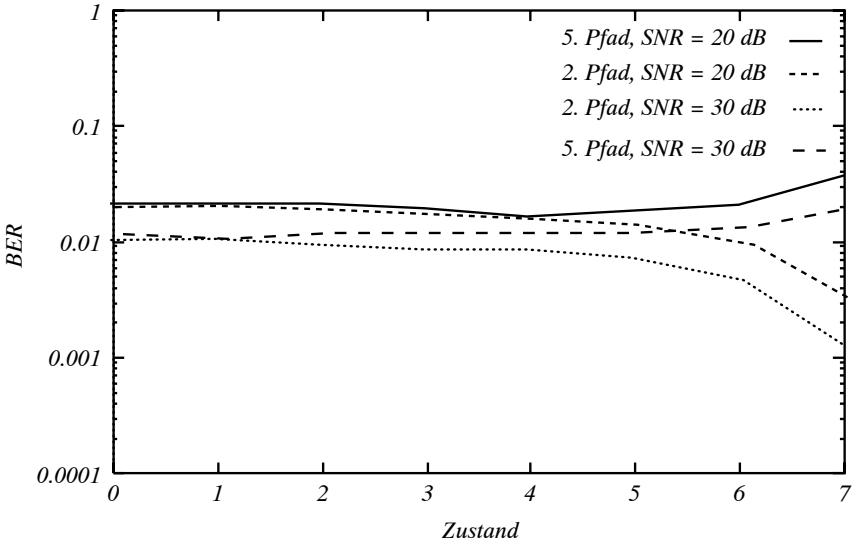

Abb. 5.10 Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Betrag der Kanalimpulsantwort des 2. u. 5. Pfades

len. Die in Kap. **??** beschriebene simulative Nachbildung eines GSM-Funknetzes mit mehreren hundert Teilnehmern kann nur untersucht werden, wenn einfache Empfängermodelle vorliegen, wie Gl. **??** sie darstellt. Nur auf diese Weise ist es möglich, die zeitvarianten Pegel des Mobilfunksignals zu modellieren.

Eine Simulationsumgebung zur Nachbildung eines zellularen Funknetzes: GOOSE2++

Simulationsprogramme im Mobilfunkbereich verwenden oft sehr einfache Berechnungsverfahren für die Funkausbreitung, und die Zeitvarianz des Funkkanals wird gänzlich unberücksichtigt gelassen. Im Zusammenhang mit der Kanalcodierung ist es jedoch unerläßlich, die zeitveränderliche Übertragungsqualität des Funkkanals zu beachten, da das bursthafte Verhalten des Funkkanals die Leistungsfähigkeit der Kanalcodierung entscheidend beeinflußt.

In diesem Kapitel wird ein Simulationssystem für zellulare Mobilfunksysteme vorgestellt, das die ISO/OSI-Schichten 1-3 erfaßt und außerdem die Zeitvarianz des Funkkanals berücksichtigt. Aufbauend auf der Simulationsumgebung von M. JUNIUS, die in [?, ?] beschrieben ist, und durch die Berechnung des mittleren Empfangspegels an den jeweiligen Orten der Mobilstationen in Abhängigkeit von
– der Geländestruktur,
– der Bebauungsstruktur (Morphologiestruktur) und
– der Abschattung durch Hindernisse (Shadowing)
gekennzeichnet ist, wird der
– Schwund durch Mehrwegeausbreitung (Short-Term Fading) und die
– eventuelle Frequenzselektivität
nach bestimmten, vorgebbaren spektralen Eigenschaften der Fadingprozesse realisiert. Daran schließt sich beispielhaft ein im GSM für Vollraten-Sprachübertragung verwendetes Modul zur Kanalcodierung an.

Insofern besteht das Simulationssystem aus drei Modulen:
1. Basis-, Mobilstationen und digitalisierte Landkarte, die Informationen über die Höhe und Bebauung des Geländes sowie Abschattungshindernisse enthält,
2. Zustandsmodelle für mehrpfadigen Funkkanal und Empfänger und
3. Faltungscoder und Viterbidecoder zur Realisierung der Kanalcodierung.

Realisiert wird die Simulation im Programm **GOOSE**2++ – **G**SM **O**bject-**O**riented **S**imulation **E**nvironment, s. [?].

6.1 Geländestruktur und Bebauung

Der Einfluß der Geländestruktur und der Bebauung auf die Dämpfung zwischen Basis- und Mobilstation und damit auf den zu erwartenden Pegel am Ort der Mobilstation werden

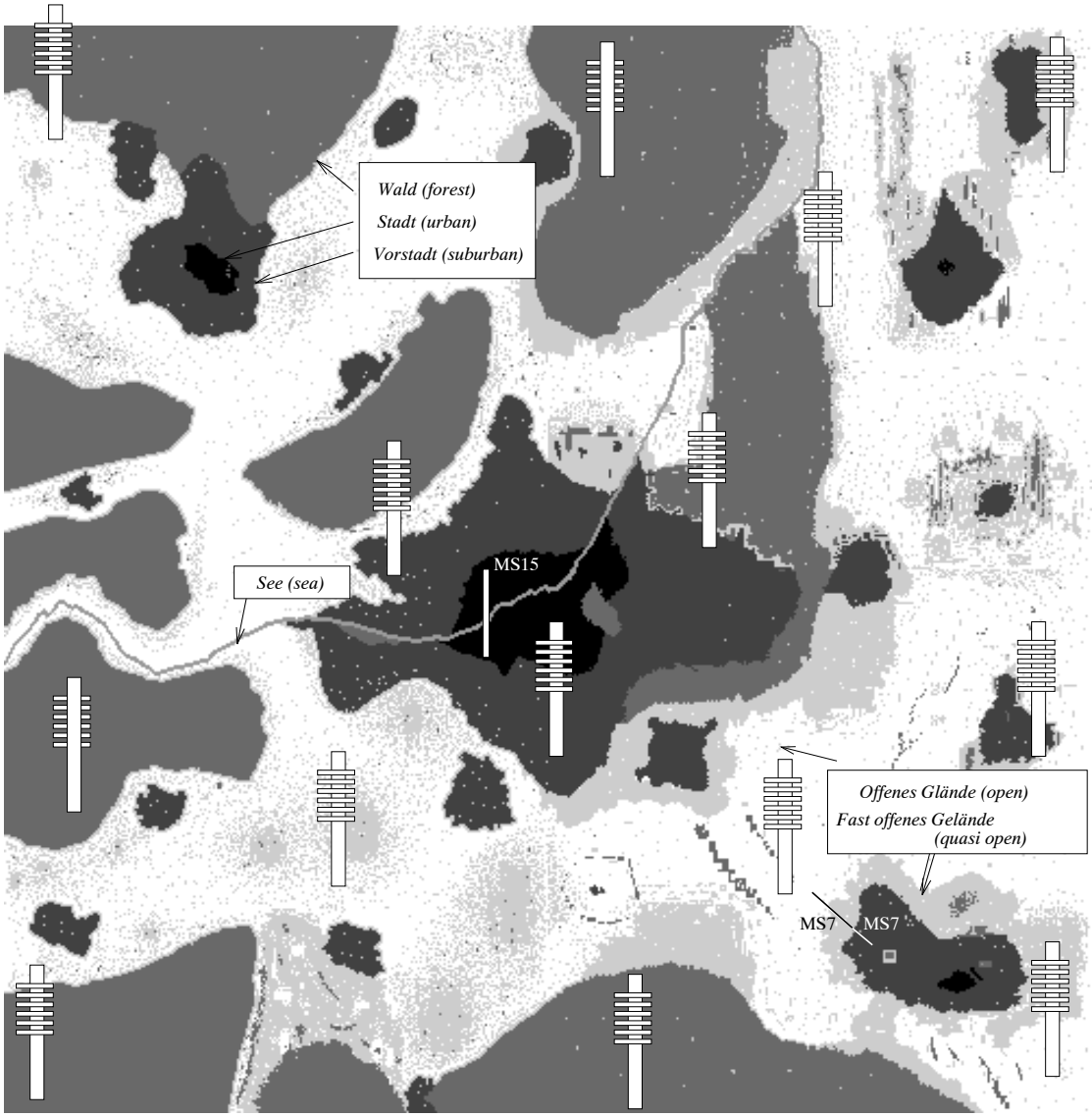

Abb. 6.1 Ein beispielhaftes Szenarium mit einem Stadtkern, zwei Vororten und 14 Basisstationen

Morphostrukturen:

- *Offen*
- *Quasi offen*
- *Wald*
- *Vorstadt*
- *Stadt*

anhand des empirischen Modells von OKUMURA, [?] bzw. der einfacher zu handhabenden Version von HATA, [?] berechnet.

Okumuras Modell basiert auf Messungen, die in den sechziger Jahren in Tokio und Umgebung durchgeführt wurden. Aus den Messungen resultieren eine Reihe von Diagrammen, in denen der Einfluß von Geländetyp und Bebauung auf die zu erwartende Dämpfung festgehalten ist.

Das Gelände wird folgendermaßen klassifiziert: *quasi-smooth*, *irregular*, mit weiterer Unterteilung in *rolling hilly*, *isolated mountain* und *sloping*. Die Bebauung ist unterteilt in *open*, *suburban* und *urban*. Im Programm sind darüber hinaus noch *forest*, *quasi-open* und *sea* im-

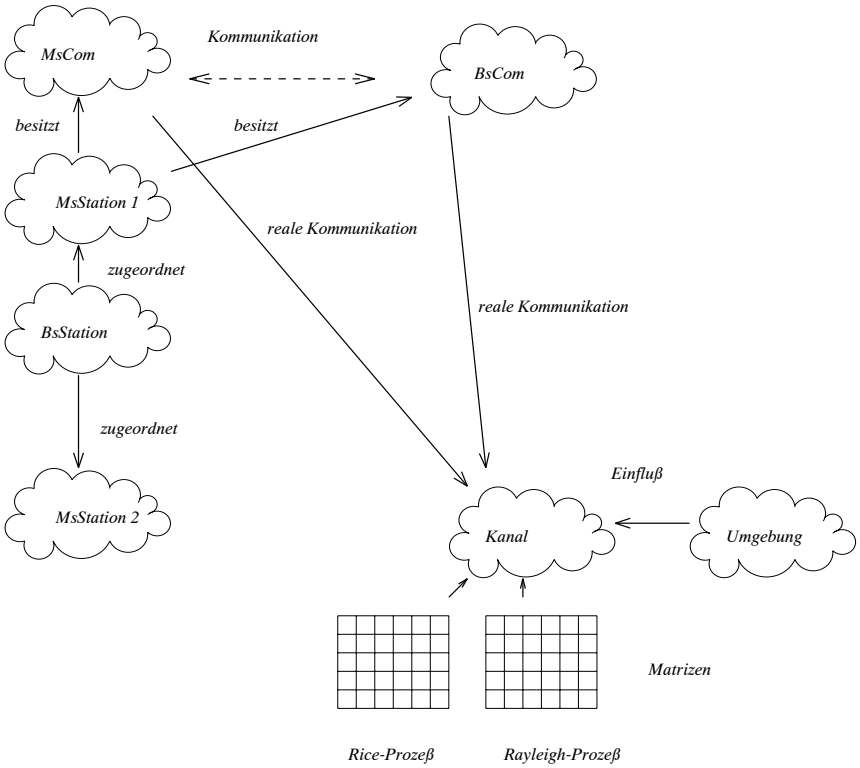

Abb. 6.2 Struktur einer Umgebung zur Multi-Link Simulation

plementiert. Abb. **??** zeigt beispielhaft ein Szenarium des Simulators mit einem Stadtkern, zwei Vororten und 14 Basisstationen.

Anhand des Geländetyps und der Bebauung wird die Funkausbreitung mit Hilfe der entsprechenden Korrekturfaktoren berechnet. Diese so erhaltenen Werte sind Langzeitmittelwerte des Pegel bzw. der Dämpfung und bilden die Basis für die weitere Bestimmung der stochastischen Prozesse, die das evtl. frequenzselektive Fadingverhalten nachbilden.

6.2 Abschattung und Mobilität

Durch mittelgroße Hindernisse in der Verbindungslinie zwischen Basis- und Mobilstation treten Abschattungen auf. Diese äußern sich in Pegeleinbrüchen, wenn die Mobilstation in den Funkschatten des Hindernisses gerät. Das Simulationsprogramm wurde so implementiert, daß Abschattungen durch diskrete Hindernisse hervorgerufen werden, die zusätzlich zu Höhe und Bebauung in der digitalisierten Landkarte angegeben sind. Häufigkeit der Hindernisse und Stärke der Dämpfung sind abhängig von der jeweiligen Morphologie des Geländeabschnitts.

Für die Modellierung der Mobilität der Mobilstationen wurde zunächst unterstellt, daß es sich um Fahrzeuge handelt, die sich auf einem Straßennetz bewegen. In neueren Arbeiten wurden auch Fußgänger modelliert, s. [**?**].

6.3 Mehrwegeausbreitung und Frequenzselektivität

Das Hauptproblem der simulativen Nachbildung eines Funkszenariums mit mehreren Kommunikationsteilnehmern ist das vom aktuellen lokalen Szenarium, d.h. von der Umgebung mit Morpho- und Geländestruktur beeinflußte Modell des Funkkanals. Bisherige Ansätze verwenden Fritchmann-Modelle, s. [?], die entweder mit Parametersätzen zur Simulationszeit aktuell generiert werden müssen, wobei die momentane Geschwindigkeit, die Entfernung des Senders und der Morphotyp der Umgebung Berücksichtigung finden, oder aber mit einer endlichen Anzahl von Parametersätzen vor der eigentlichen Simulation erstellt werden. Bei dem letzten Lösungsansatz besteht offensichtlich das Problem, daß für eine Anzahl von Geschwindigkeiten, mittleren Empfangsleistungen und vier bis sechs Morphostrukturtypen die Parametersätze vor Simulationsbeginn erstellt werden müssen, so daß, je nach Auflösung der Geschwindigkeits- und Leistungs-Skalen, umfangreiche Datenmengen erstellt werden müssen.

Die in dieser Arbeit entwickelten Modelle erlauben eine flexiblere Lösung. In Kap. ?? hat sich gezeigt, daß die sich einstellenden Bitfehlerwahrscheinlichkeiten weitgehend unabhängig von der mittleren Empfangsleistung und der Geschwindigkeit durch den dort abgeleiteten Zusammenhang beschrieben werden können. Dann ist lediglich noch eine Unterscheidung bzgl. der Morphostrukturtypen vorzunehmen. Und selbst da zeigt sich eine große Ähnlichkeit, lediglich die Anzahl der Ausbreitungspfade ist eine entscheidende Größe.

In Abb. ?? ist die gewählte Simulationsstruktur erläutert. Jeder Basisstation sind Mobilstationen zugeordnet, deren Kommunikationsverhalten von den Modulen *MsCom* und *BsCom* realisiert wird. Die Nachbildung des evtl. frequenzselektiven Funkkanals wird durch den Modul *Kanal* realisiert, der durch die aktuelle Umgebung der Mobil- bzw. Basisstation beeinflußt wird. Die Matrizen zur Parametrisierung der den Kanal bildenden Zustandsmodelle werden für maximale Geschwindigkeitswerte vor der eigentlichen Simulation bestimmt. Die aktuelle, von der Geschwindigkeit bestimmte Zeitvarianz wird durch Interpolation errechnet.

Okumura		COST-207
open		RA
quasi-open		RA
forest		HT
suburban		TU
urban		BU

Tab. 6.1 Abbildung Okumura – COST-207

In [?] finden sich verschiedene Klassifikationen nach Geländetypen. Die mit COST-207 bezeichnete, die die Typen 'Typical Urban', 'Bad Urban', 'Hilly Terrain', 'Rural Area', s. 27 ff., verwendet, wurde in Kap. ?? in ihrer Auswirkung auf Doppler-Spektren und Power-Delay-Profiles formal beschrieben. Die nach COST-207 vorgeschlagene Kategorisierung wird gemäß Tab. ?? den Okumura Landschaftstypen zugeordnet.

6.4 Einführung in die Funkübertragung des GSM

Wesentliche Elemente der Schicht 1 des GSM-Systems werden hier kurz beschrieben, wenn sie nicht in Kap. **??** erläutert wurden, wie z.B. die GMSK-Modulation.

6.4.1 Multiplexverfahren

Für die Übertragung im GSM steht der Frequenzbereich zwischen 890 MHz und 960 MHz zur Verfügung. Damit mehrere Mobilfunkteilnehmer gleichzeitig das Mobilfunknetz nutzen können, müssen Multiplexverfahren eingesetzt werden.

Im GSM wird eine Kombination von Frequenzmultiplex und Zeitmultiplex angewendet. Dazu wird das Frequenzband zunächst in zwei Bereiche aufgeteilt. Der erste Bereich, $890 - 915\,\mathrm{MHz}$, dient der Übertragung von der Mobilstation zur Basisstation, dem sog. Uplink. Der Frequenzbereich von $935 - 960\,\mathrm{MHz}$ dient der Übertragung in entgegengesetzter Richtung, dem Downlink. Diese beiden Frequenzbereiche werden in einzelne Frequenzkanäle aufgeteilt. Der Abstand der Mittenfrequenzen der einzelnen Frequenzkanäle beträgt $200\,\mathrm{kHz}$. Wird an den unteren Rändern beider Bereiche jeweils eine Schutzzone der Breite $200\,\mathrm{kHz}$ berücksichtigt, so erhält man jeweils 124 mögliche Frequenzkanäle für den Uplink und den Downlink. Auf einem Frequenzkanal werden mittels TDMA-Verfahren acht Zeitkanäle realisiert. Jedem dieser acht Zeitkanäle ist ein Zeitschlitz (Slot) der Länge $0,577\,\mathrm{ms}$ zugeteilt.

6.4.2 Logische Kanäle

Mit dem Begriff *Kanal* wird im GSM i.a. nicht der physikalische Kanal sondern ein *logischer Kanal* bezeichnet. Mehrere logische Kanäle können nacheinander in einem Zeitschlitz auftreten. Die Reihenfolge, in der sie auftreten, ist in sogenannten Mehrfachrahmen festgelegt. Diese Mehrfachrahmenstruktur wird auf einen einzelnen physikalischen Kanal abgebildet. Man unterteilt die logischen Kanäle in zwei Hauptgruppen: *Verkehrskanäle*, (TCHs) und *Steuerkanäle* (CCHs). Die Verkehrskanäle werden zur Übertragung von Nutzinformation wie Sprache, Faxdaten, Daten benutzt. Die folg. Tabelle liefert eine Übersicht aller in [**?**] spezifizierten Verkehrskanäle.

Verkehrskanal	**Abkürzung**
Vollraten TCH für Sprache	TCH/FS
Halbraten TCH für Sprache	TCH/HS
9,6 kbit/s Vollraten TCH für Daten	TCH/F9.6
4,8 kbit/s Vollraten TCH für Daten	TCH/F4.8
4,8 kbit/s Halbraten TCH für Daten	TCH/H4.8
$\leq$ 2,4kbit/s Vollraten TCH für Daten	TCH/F2.4
$\leq$ 2,4kbit/s Halbraten TCH für Daten	TCH/H2.4
Zellen-Rundsendekanal (Cell Broadcast Channel)	CBCH

Einige Verkehrskanäle gibt es auch mit halber Rate, d.h. zwei Halbratenkanäle teilen sich einen physikalischen Kanal. Die Steuerkanäle dienen zur Übertragung von Signalisierungs-

information zur Einrichtung, Aufrechterhaltung und Auslösung von rahmenorientierten Kommunikationsverbindungen über die Luftschnittstelle. Die Steuerkanäle SACCH und FACCH transportieren Informationen, die dem Erkennen von Handover-Situationen und der Handover-Durchführung[1] dienen. Über die Steuerkanäle CCH und ACCH wird eine Verbindung eingerichtet bzw. ausgelöst. Wenn keine Verbindung in Betrieb ist, werden Steuerkanäle dazu benutzt, den Aufenthaltsort der Mobilstation zu registrieren. Eine vollständige Liste der Steuerkanäle ist in der umseitigen Tabelle gegeben, [?].

Gruppe	Kanal	Bezeichner	Richtung
BCCHs		Broadcast Control Channels	
	FCCH	Frequency Correction Channel	MS $\leftarrow$ BS
	SCH	Synchronisation Channel	MS $\leftarrow$ BS
	BCCH	Broadcast Control Channel	MS $\leftarrow$ BS
CCCHs		Common Control Channels	
	RACH	Random Access Channel	MS $\rightarrow$ BS
	PCH	Paging Channel	MS $\leftarrow$ BS
	AGCH	Access Grant Channel	MS $\leftarrow$ BS
DCCHs		Dedicated Control Channels	
	SDCCH	Stand-Alone Dedicated Control Channel	MS $\leftrightarrow$ BS
	SACCH	Slow Associated Control Channel	MS $\leftrightarrow$ BS
	FACCH	Fast Associated Control Channel	MS $\leftrightarrow$ BS
	CBCH	Cell Broadcast Channel	MS $\leftarrow$ BS

6.4.3 Burst-Strukturen

In dem 0.577 ms langen Zeitintervall eines Zeitschlitzes können bei der GMSK Modulation 156,25 Bits übertragen werden. Die in einem Zeitschlitz (Slot) gesendete Datenmenge wird als Burst bezeichnet. Es gibt verschiedene Bursttypen, die sich durch Funktion und Inhalt unterscheiden.

Normalburst (Normal Burst, NB) Nachrichten der logischen Verkehrs- und Steuerkanäle werden mit dem Normalburst transportiert. Dabei stehen $2 \cdot 57$ Bits zur Verfügung. Die in der Mitte befindliche Trainingssequenz wird für die Synchronisation, s. Kap. **??**, und die Kanalschätzung, Kap. **??**, benötigt.

Frequenzkorrekturburst (Frequency Correction Burst, FCB) Dieser Burst wird benötigt, um den Oszillator der Mobilstation auf die Trägerfrequenz zu synchronisieren. Der Burst wird von der Basisstation auf dem FCCH verschickt. Die Bits der

[1] Handover bezeichnet die Weitergabe eines Mobilfunkteilnehmers an eine (meist) benachbarte Zelle, weil dort für den Teilnehmer günstigere Empfangsbedingungen herrschen.

gesendeten Bitfolge bilden eine Sequenz von 'Nullen', die die empfangende Mobilstation zu einem Signal demoduliert, das der um 1652/24 kHz (=67,7 kHz) verschobenen Trägerfrequenz entspricht, vgl. [**?**].

Synchronisationsburst (Synchronisation Burst, SB) Die erweiterte Trainingsfolge gestattet der Mobilstation, die zeitliche Synchronisation vorzunehmen. Die verschlüsselten Bits enthalten den Feststationskennungscode (Base Station Identity Code, BSIC) und die TDMA Rahmennummer. Der SCB wird von der Basisstation auf dem SCH übertragen.

Zugriffsburst (Access Burst, AB) Dieser Burst wird von der Mobilstation auf dem RACH versendet und ist durch eine kurze Nutzbitfolge und ein langes Schutzintervall gekennzeichnet. Die Länge des Schutzintervalls ist die notwendige Zeitspanne von $252\mu s$, die der Laufzeit eines Signals einer zeitlich nicht synchronisierten Mobilstation am Rand einer Zelle mit dem Radius von 35 km entspricht.

6.5 Fehlersicherung

Die bei der digitalen Übertragung auftretende Bitfehlerwahrscheinlichkeit kann zu einer Minderung der Übertragungsqualität führen, die, je nach Anwendung, störend wirkt (z.B. bei Sprache) oder aber zu nicht hinnehmbaren Behinderungen der Anwendung führt.

Durch *Quellcodierung* wird die Voraussetzung für binäre Datenübertragung geschaffen, *Kanalcodierung* dient zur Sicherung des Funkkanals gegen fehlerhafte Übertragung. Störungen können durch Rauschen, Fading und Interferenz auftreten. Kanalcodierung stellt systematisches Zufügen von redundanter Information zu den zu übertragenden Daten dar. Proportional zur zugefügten Redundanz werden *ein* oder *mehrere* Übertragungsfehler beim Kanaldecodierer erkannt und/oder korrigiert.

Prinzipiell unterscheidet man zwischen fehlererkennenden (CRC, **C**yclic **R**edundancy **C**heck), fehlerkorrigierenden (FEC, **F**orward **E**rror **C**orrection) und fehlerbehandelnden (ARQ **A**utomatic **R**epeat Re**Q**uest) Verfahren.

6.5.1 Faltungscodes

Faltungscodes sind, im Gegensatz zu Blockcodes, gedächtnisbehaftet, d.h. die Codierung jeder Stelle ist von den vorausgegangenen Bits abhängig. Beim Decodiervorgang wird ein *Maximum-Likelihood-Decoding* mittels des *Viterbi-Algorithmus* vorgenommen. Der Decoder betrachtet alle möglichen Bitsequenzen, die übertragen werden können und ordnet ihnen eine Metrik zu, die der Empfangswahrscheinlichkeit entspricht. Als Ausgabe schließlich erscheint beim Decoder die Sequenz mit der größten Empfangswahrscheinlichkeit. Faltungscoder werden bevorzugt zusammen mit *Interleavern* eingesetzt. Faltungscodierer sind empfindlich gegen Bündelfehler, Interleaver verteilen auftretende Störungen über längere Abschnitte.

Faltungscodes werden durch ein Trippel (n, k, K) charakterisiert. Die Anzahl der Ausgänge ist n, k die der Eingänge und K die Anzahl der Speicherregister (Speichertiefe K). Die Coderate ist dann $R = \frac{k}{n}$. Die Einflußlänge des Codes ist identisch der Anzahl der verwendeten Speicherregister K. Es ist günstig, jeder zu codierenden Sequenz *(K-1) null-Bits* am Ende anzufügen, um die Speicher für den nächsten Codiervorgang zu initialisieren und um dem Viterbi-Decoder eine Decodierhilfe zu geben.

Die Codiervorschrift bei Faltungscodern kann entweder durch *Vektoren* beschrieben oder auch mittels eines Zustandsdiagramms dargestellt werden. Das Trellisdiagramm ist eine erweiterte Darstellung des Zustandsdiagramms. Es gibt eine bessere Übersicht der Zustandsübergänge in Abhängigkeit vom Takt, s. [?] p. 314 ff.

Bei Faltungscodes kann, im Gegensatz zu Blockcodes, keine minimale Hammingdistanz d_{min} angegeben werden. Hier spricht man von *freier Länge* d_{free}, die das minimale Hamminggewicht, das ein von Null verschiedener Eingangsvektor erzeugt, darstellt. Die Anzahl der korrigierbaren Fehler ist dann

$$t = \left\lfloor \frac{d_{free} - 1}{2} \right\rfloor . \tag{6.1}$$

Das genaue Verhalten bei bestimmten Fehlerarten kann nicht angegeben werden und muß durch stochastische Simulation ermittelt werden. Es läßt sich jedoch eine Abschätzung vornehmen. Die Restbitfehlerwahrscheinlichkeit P_B für binäre Faltungcodes bei einer Bitfehlerrate des Kanals p ist näherungsweise

$$P_B \leq \left. \frac{dT(D,N)}{dN} \right|_{N=1, D=2\sqrt{p(1-p)}}, \tag{6.2}$$

wobei $T(D, N)$ die erweiterte Übertragungsfunktion des Faltungscoders darstellt, s. [?] p. 344. Die bei Datenübertragung im GSM verwendeten Codes sind in Tab. ?? abgebildet.

Bei Sprachübertragung wird der gleiche Faltungscode verwendet wie für Datenübertragung mit 9.6 kbit/s, s. [?].

Durch Punktieren, d.h. systematisches Herausstreichen der vorher eingefügten Redundanz kann der Ausgangsbitstrom reduziert werden. Auf diese Weise lassen sich Faltungscoder beliebiger Rate realisieren bzw. die zugefügte Redundanz effektiv nutzen.

Faltungscoder sind besonders anfällig für burstartige Fehler, d.h. die Fehlerkorrektureigenschaften bei Büschelfehlern ist begrenzt. Um das Auftreten von Büschelfehlern zu reduzieren, werden Interleaver eingesetzt.

6.6 Der Interleaver

Der Interleaver hat die Aufgabe, die statistischen Bindungen bzgl. der Fehlerhaftigkeit zwischen benachbarten Bits zu reduzieren, so daß weniger Büschelfehler auftreten. Dies wird durch Umsortieren der Bits, evtl. auf andere Bursts erreicht. Dabei gibt es ein burstinternes Interleaving, s. [?], das die durch die Zeitvarianz des Funkkanals bedingte erhöhte Fehlerwahrscheinlichkeit zu den Burstgrenzen hin auszugleichen versucht. Das im Zusammenhang

Tab. 6.2 In GSM verwendete Faltungscoder

Datenrate	Rate	Einflußlänge K	d_{free}	Vektor
$9.6\frac{kbit}{s}$	$\frac{1}{2}$	5	7	1 0 0 1 1 1 1 0 1 1
$4.8\frac{kbit}{s}$	$\frac{1}{3}$	5	12	1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1
$2.4\frac{kbit}{s}$	$\frac{1}{6}$	5	24	1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1
Quelle:[?]				

mit der Kanalcodierung betrachtete Interleaving muß weitgreifender ausgelegt sein, damit der für den Faltungscodierer bestimmte Bitstrom möglichst gedächtnisfrei wird. So wird die Umsortierung je nach Datenrate über $4, 8$ bzw. 19 Datenbursts vorgenommen. Der Nachteil des Interleavers ist die sich einstellende Verzögerung, die sich in den aufsetzenden Protokollen, s. [?, ?], evtl. negativ auswirken kann.

Die Interleaving–Tiefe gibt an, wie stark die einzelnen gesendeten Bits zeitlich für die Übertragung auseinandergezogen werden.
Beim GSM werden nach dem Faltungscodierer Pakete von 456 Bits auf Bursts mit 114 Informationsbits verteilt. Formal läßt sich der Interleavingalgorithmus darstellen als

$$I(B, j) = C(n, k) \text{ für } k = 0 \ldots 455 \text{ und } n = 0 \ldots N + 1 \tag{6.3}$$

$C(n, k)$ ist der Block mit 456 Bit, der den Faltungscodierer verläßt, $I(B, j)$ ist der Block mit 114 Bit, der über den Funkkanal übertragen wird. Zur Bestimmung von B und j gelten folgende Gleichungen:

$$\text{Interleaver–Tiefe 19:} \qquad B = B_0 + 4 \cdot n + k \bmod (19) + k \operatorname{div} 114 \tag{6.4}$$
$$j = k \bmod (19) + 19 \cdot [k \bmod (6)],$$
$$\text{Interleaver–Tiefe 8:} \qquad B = B_0 + 4 \cdot n + k \bmod (8) \tag{6.5}$$
$$j = 2 \cdot [(49 \cdot k) \bmod (57)] + [(k \bmod (8)) \operatorname{div} 4].$$

Dabei sind B und n Blockzähler, j und k Zähler der Bitposition. Bei einer Interleaving–Tiefe von 19 werden die ersten 114 Bits eines 456 er Blocks auf Slot 0 bis 18 verteilt, die zweiten 114 Bit auf Slot 1 bis 19, d.h. ein Paket von 456 Bits wird insgesamt auf 22 Slots à 114 Bits verteilt.

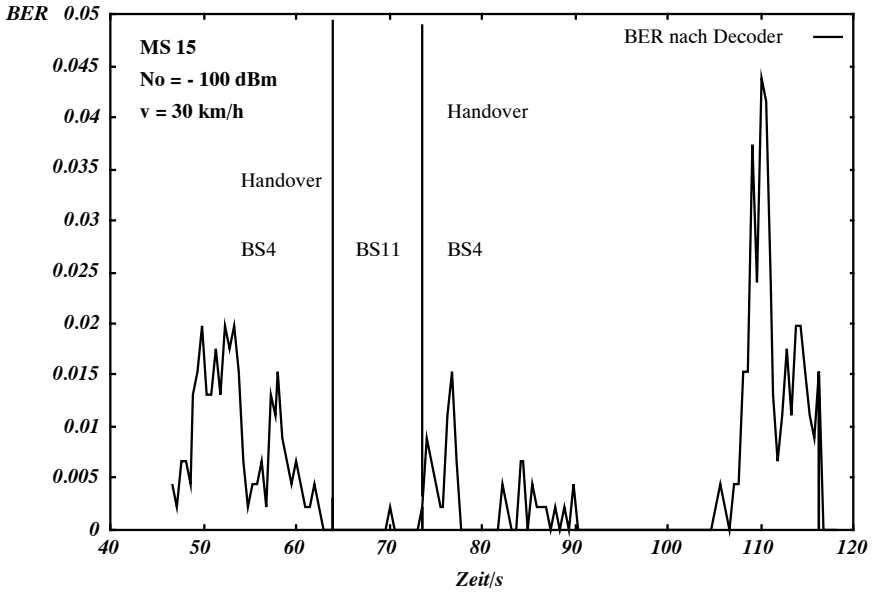

Abb. 6.3 Bitfehlerwahrscheinlichkeit des mobilen Teilnehmers *MS15* während der Gesprächsphase

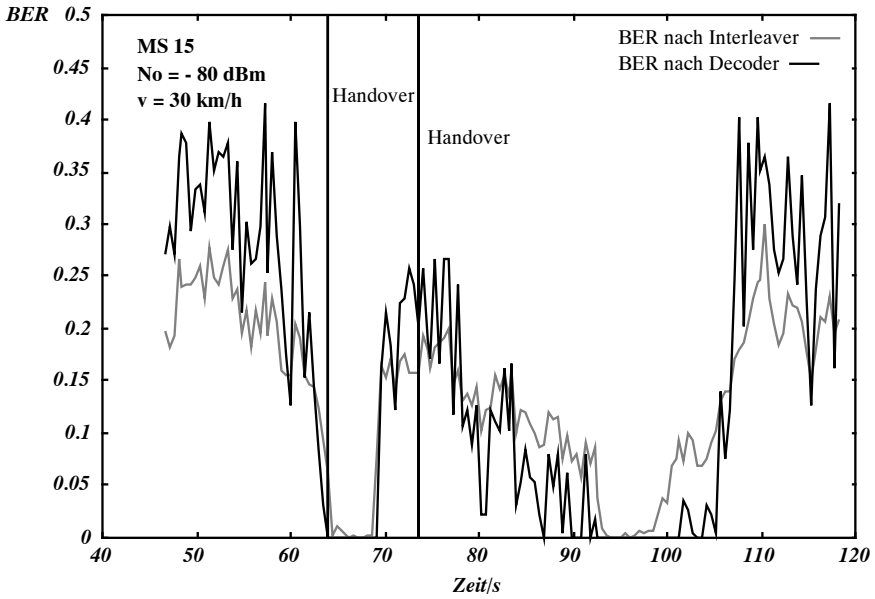

Abb. 6.4 Bitfehlerwahrscheinlichkeit des mobilen Teilnehmers *MS15* während der Gesprächsphase

6.7 Ergebnisse der stochastischen Simulation

In der bisher beschriebenen Simulationsumgebung kann nun konkret für bestimmte mobile Teilnehmer oder aber gemittelt über alle Teilnehmer die Bitfehlerwahrscheinlichkeit, bzw. die Fehlerrate der GSM-Bursts ermittelt werden. Dabei wird die von der Umgebung abhängige Abschattung ebenso berücksichtigt wie die Mehrwegeausbreitung.

Abb. **??** zeigt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit (nach der Decodierung) über der Zeit, die

die Sprachübertragung eines mobilen Teilnehmer beeinträchtigt. Der Teilnehmer, *MS15*, bewegt sich im Simulationszenarium mit einer Geschwindigkeit von 30km/h durch ein rein städtisches Gebiet. Der Empfangspegel ist also vermehrt den Schwankungen des kurzzeitigen Schwunds (short term fading) ausgesetzt. Die vertikalen Linien in Abb. **??** markieren die Handover-Zeitpunkte. Zunächst ermöglicht die Basistation *BS4* den Übergang ins Festnetz, s. Abb. **??**, dann findet ein Handover zu Basisstation *BS11* statt, während anschließend, nach ca. 75 s vom Beginn des Gesprächs, wieder zu Basisstation *BS4* gewechselt wird. Die Handoveralgorithmen können hier nicht erläutert werden, Untersuchung findet man in [**?**].

Abb. **??** zeigt den simulierten Einfluß bei erhöhten Rauschpegel von $N_0 = -80\,\mathrm{dBm}$, der der Interferenzleistung der einzelnen Teilnehmer zugefügt wird, auf die sich für den mobilen Teilnehmer ergebende Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Es kann die Bitfehlerwahrscheinlichkeit vor und nach Decodierung unterschieden werden. Ist die Verbindungsqualität gut, ergeben sich wenig Fehler, s. schattierte Kurve im Bereich von $90 - 100\,\mathrm{s}$. Diese Fehler können vom Viterbi-Decoder erkannt und beseitigt werden, s. schwarze Kurve. Die Fehleranzahl wird also bei guter Verbindungsqualität reduziert. Ist dagegen die Verbindungsqualität schlecht, wie z.B. im Intervall von $50 - 60\,\mathrm{s}$, dann kann der Decoder die nun häufiger auftretenden Fehler nicht erkennen und produziert außerdem noch zusätzlich Fehler. So liegt die Kurve für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit *nach* dem Decoder über der Kurve für die Fehlerwahrscheinlichkeit *vor* dem Decoder, bzw. nach dem Interleaver. In [**?**] wird dies *catrastophic error propagation* genannt. Mit Frequenzsprungverfahren kann dieser Effekt reduziert werden.

6.8 Untersuchung von Frequenzsprungverfahren

Fadingerscheinungen sind i.a. frequenzselektiv. Während sich auf einer Frequenz die Wellen auslöschen, kann auf einer anderen Frequenz am gleichen Ort zur gleichen Zeit eine störungsfreie Verbindung möglich sein. Die Ursache dafür liegt in den unterschiedlichen Laufzeiten auf den einzelnen Pfaden. Dabei ist wesentlich, daß die Laufzeiten sich um mehrere Perioden der Trägerfrequenz unterscheiden. Sind die Laufzeiten gleich, ergibt die Überlagerung auf allen Frequenzen das gleiche Resultat. Man spricht von *flat Fading*. Eine Laufzeitdifferenz von 100 ns ergibt bei 900 MHz eine positive Interferenz, während bei 905 MHz Auslöschung vorliegt. Eine wesentliche Größe ist dabei die Kohärenzbandbreite, die den Frequenzabstand bezeichnet, bei dem die Korrelation 0.5 in bezug auf das ursprüngliche Band beträgt. Sie wird durch die Länge der Kanalimpulsantwort der jeweiligen Umgebungen bestimmt und liegt beim Landmobilfunkkanal bei ca. $500\,kHz$ bis 1 MHz.

Wie erwähnt wird das Frequenzsprungverfahren eingesetzt, um über das Interleaving hinaus das büschelartige Auftreten der Fehler durch ein Verteilen der schlechten Verbindungszeit über einen größeren Zeitraum zu reduzieren. Während beim Interleaving die Fehler auf mehrere, sonst mit weniger Fehlern versehene Bursts verteilt werden, wird beim Frequenzsprungverfahren die büschelartige Fehlerstruktur durch Wechseln in ein anderes Frequenzband aufgebrochen. So kann das büschelartige Auftreten der Fehler in einem gewissen Sinne über einen längeren Zeitraum verteilt und die Redundanz der verwendeten Kanalcodierung

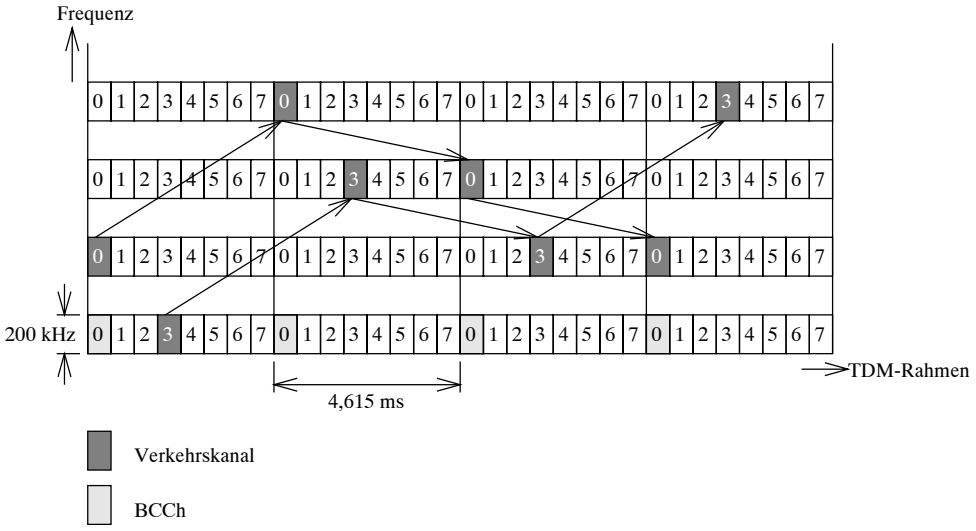

Abb. 6.5 Prinzip des Frequenzsprungverfahrens

effektiver genutzt werden, obwohl die mittleren Signalpegel gleich bleiben. Der Gewinn durch Frequenzsprungverfahren ergibt sich deshalb nur in Verbindung mit der Kanalcodierung. Abb. **??** zeigt die Anwendung im GSM im Zusammenhang mit der TDMA-Struktur. In GSM wird *langsames* Frequenzspringen (Slow Frequency Hopping, SFH) verwendet [**?**], d.h. es wird jeweils ein vollständiger Burst in einem Frequenzkanal übertragen und dann wird in ein anderes Frequenzband gewechselt.

W. Koch und J. Petersen, s. [**?**], untersuchen Frequenzsprungverfahren im Vergleich zu Diversität. Dabei wurde eine einzige Kommunikationsbeziehung mit unterschiedlichem Störpotential untersucht. Zunächst wurde das Signal-zu-Rausch-Verhältnis variiert und anschließend ein Gleichkanal-Störer betrachtet. Der Gewinn des Frequenzsprungverfahrens beträgt ca. $5-7\,\mathrm{dB}$ in beiden Fällen. Wird statt über 8 nur über 4 Frequenzen gesprungen, reduziert sich der Gewinn um $1.7\,\mathrm{dB}$. Es werden unabhängige Frequenzkanäle betrachtet, die in der Praxis durch Wechseln in das jeweils übernächste Frequenzband realisiert werden.

Abb. **??** zeigt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit über der Zeit des mobilen Teilnehmer, *MS7*, der sich im Simulationszenarium auf einer Landstraße mit $100\,\mathrm{km/h}$ bewegt. Während der $80\,\mathrm{s}$ andauernden Gesprächsphase fährt der Teilnehmer aus der Landschaft mit dem Geländetyp *offen* in die *quasi-offene* Landschaft und ist während der ganzen Gesprächsdauer mit der Basisstation *BS9* verbunden. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten sind nach dem Deinterleaving wie nach dem Viterbi-Decoder dargestellt. In Abb. **??** ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für den gleichen Teilnehmer bei Anwendung von Frequenzsprungverfahren gezeigt. Im Einzelfall kann die Bitfehlerwahrscheinlichkeit drastisch reduziert werden. Insbesondere kann die sog. Drop-Out-Zeit, während der (wegen $\mathrm{BER} > 0.25$) keine Verbindung möglich ist, verkürzt werden.

Bei der Betrachtung der mittleren Fehler wird diese Verbesserung aber nicht derart deutlich, da durch den Mittelungseffekt die i.a. schon gute Verbindungsqualität überwiegt. In der umseitigen Tabelle, s. Tab. **??** sind die mittleren Bitfehlerwahrscheinlichkeiten nach der Decodierung für unterschiedliche Rauschpegel, die der Interferenzleistung der einzel-

nen Teilnehmer zugefügt werden, dargestellt. Ebenso ist der Durchsatz dargestellt, der die mittlere Anzahl fehlerfreier Normal-Bursts pro Zeitschlitz und Station bezeichnet.

6.9 Zusammenfassung

Die Zusammenfassung kann für zwei Problemkreise formuliert werden.

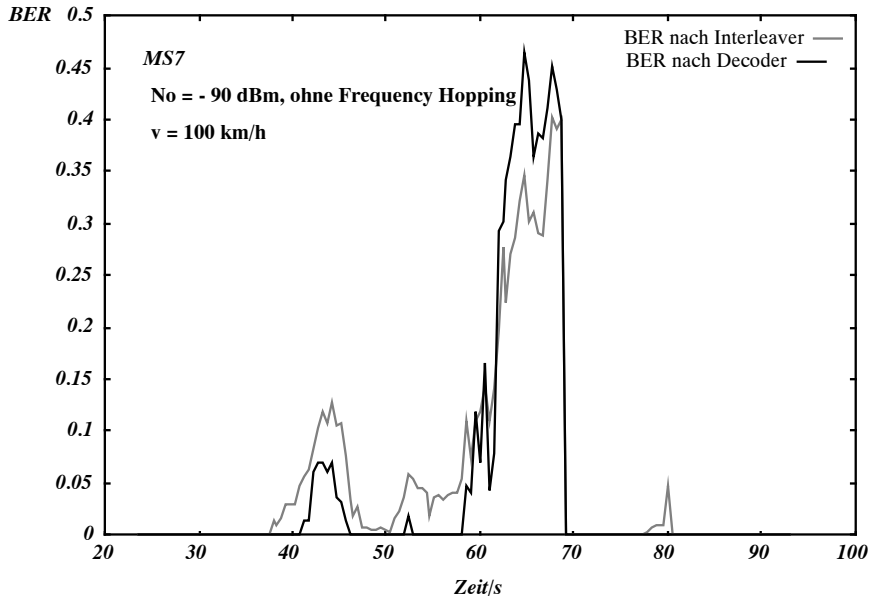

Abb. 6.6 Bitfehlerwahrscheinlichkeit des mobilen Teilnehmers *MS7* während der Gesprächsphase ohne Frequenzsprungverfahren

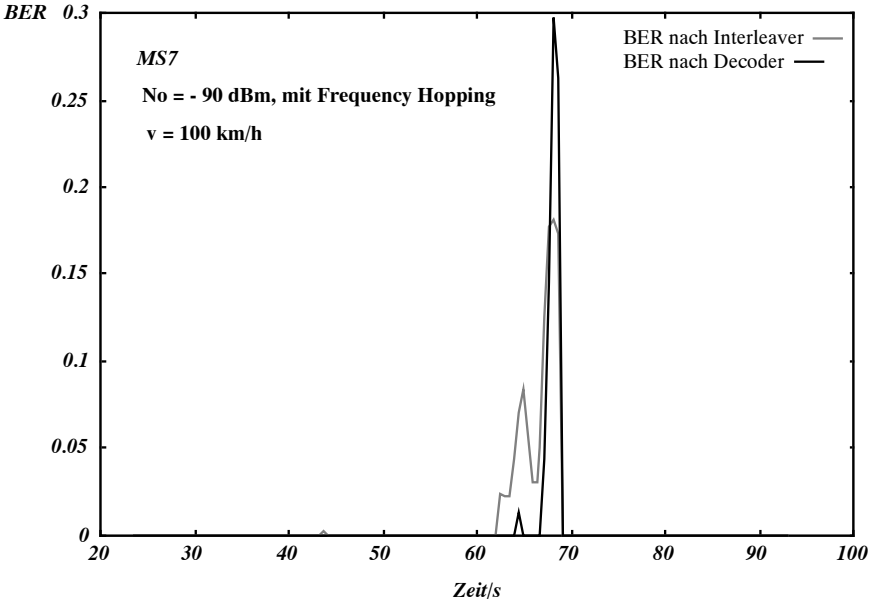

Abb. 6.7 Bitfehlerwahrscheinlichkeit des mobilen Teilnehmers *MS7* während der Gesprächsphase mit Frequenzsprungverfahren

P_{Noise}		MS BER		MS Durch-satz	BS BER		BS Durch-satz
-80 dBm	ohne FH	2.5%		86.1%	3.0%		85.1%
	mit FH	1.8%		90.7%	2.5%		89.7%
-90 dBm	ohne FH	1.7%		92.6%	2.2%		91.6%
	mit FH	0.9%		97.7%	0.9%		97.8%
-100 dBm	ohne FH	0.8%		99.1%	0.8%		99.1%
	mit FH	0.5%		99.5%	0.5%		99.5%

Tab. 6.3 Mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit und Durchsatz der mobilen Teilnehmer

Auf Modellebene wurde die Verwendbarkeit der vorgeschlagenen verallgemeinerten Gilbert-Elliott-Modelle dargestellt. Selbst in Szenarien, wie dem hier vorliegenden mit einigen hundert mobilen Teilnehmern, läßt sich für jede Kommunikationsbeziehung ein von der Umgebung beeinflußtes Zustandsmodell für den Funkkanal realisieren. Dabei werden sowohl der evtl. frequenzselektive Charakter des Funkkanals wie auch der Einfluß der Morphostruktur berücksichtigt.

Neben der Beurteilung der verwendeten Modelle können auf der Ebene des hier untersuchten Verfahrens zur Unterstützung der Fehlersicherung ebenfalls bewertende Aussagen vorgenommen werden. Das untersuchte Frequenzsprungverfahren ist in der Lage, die hohe Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Orte mit schlechter Funkverbindung drastisch zu reduzieren. Dabei hängt die Häufigkeit, mit der die mobilen Teilnehmer eine schlechtere Funkverbindung erfahren, von der Ausleuchtung des Szenariums ab, was aber hier nicht näher diskutiert wurde. Die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit aller in einem Szenarium befindlichen mobilen Teilnehmer wird nur geringfügig reduziert.

Herleitung von Paketfehlermodellen für die Analyse von Funknetzen

Das Hauptproblem bei der Leistungsanalyse größerer Netze ist, neben einem geeigneten Modell für die Topologie, die richtige Wahl des Modells für die Fehlerstörung übertragener Datenpakete. Dabei wird ein Datenpaket als eine endliche Sequenz von Datensymbolen betrachtet. Nach Definition 2, s. Kap. **??**, kann ein Datenpaket als Ausschnitt eines Fehlerprozesses betrachtet werden. Es wurde schon erwähnt, daß mit ARMA-Prozessen kein Paketfehlermodell abgeleitet werden kann. Im folgenden sollen auf einfachen geometrischen Prozessen beruhende Paketfehlermodelle diskutiert werden.

7.1 Gedächtnislose Paketfehlermodelle

Wir unterscheiden zwischen gedächtnislosen und gedächtnisbehafteten Modellen. Zunächst sollen Modelle entwickelt werden, bei denen die Paketfehlerwahrscheinlichkeit aufeinander folgender Pakete als unabhängig angenommen werden kann, bzw. wegen eines besonderen Kanalzugangsverfahren, wie z.B. Paketzugriffsverfahren, zu vernachlässigen ist. Dieser Fall soll nun als gedächtnisloses Modell diskutiert werden.

7.1.1 Paketfehlermodelle auf der Basis geometrischer Prozesse

Die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg eines binären Zufallsexperiments $e_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$Pr\{e_n = 1\} \;=\; p, \qquad Pr\{e_n = 0\} \;=\; 1-p \qquad p \in [0,1]. \tag{7.1}$$

Dies ist nach Definition 2, der Definition des Fehlerprozesses, ein Modell für die Fehlerhaftigkeit eines Datensymbols. Offensichtlich setzt diese Annahme zunächst einen nicht veränderlichen Funkkanal voraus.

Bei aufeinanderfolgenden Datensymbolen ist die Betrachtung der stochastischen Bindungen der Datensymbole untereinander von großer Bedeutung. Zunächst nehmen wir an, daß die Ereignisse e_n und e_{n+1} für alle n voneinander unabhängig sind. Dann kann nach dem Zeitpunkt g gefragt werden, zu dem das Ereignis $e_n = 1$ erstmalig eintritt und es gilt

$$\begin{aligned} Pr\{g = r\} \;&=\; Pr\{e_n = 0, e_{n+1} = 0, e_{n+2} = 0, \ldots, e_{n+r-1} = 0, e_{n+r} = 1\} \\ &=\; (1-p)^{r-1}\, p \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0,\, p \in [0,1]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

g besitzt dann eine geometrische Verteilung. Wird die Anzahl k der eintretenden Ereignisse $e_n = 1$ aus der Menge der insgesamt möglichen Ereignisse h mit $\sum_{i=1}^{h} e_i = k$ bezeichnet, dann ergibt sich für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung die Binomialverteilung

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k}. \tag{7.3}$$

Sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Einzelereignisse eintreten, bzw. die Symbolstörung eintritt, bedingt durch eine zufällige, jedoch über eine bestimmte Zeit konstante Größe Z, so läßt sich schreiben

$$Pr\{e_n = 1 \,|\, Z = z\} = Pr\{e_n = 1 \,|\, z\} = \phi(z) \qquad \text{mit } \phi : z \to [0,1]. \tag{7.4}$$

ϕ muß dann als Funktion interpretiert werden. Die Tatsache, daß e_n eine bedingte Größe darstellt, trägt der Zeitvarianz des Mobilfunkkanals Rechnung: Zu gewissen Zeiten kann sich die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ändern. Gl. **??** wird dann zu

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k \,|\, z\right\} = \binom{h}{k} \phi(z)^k (1-\phi(z))^{h-k}. \tag{7.5}$$

Nach den Bayes'schen Formeln kann diese Gleichung umgeformt werden. Ist Z verteilt mit $f_z(\cdot)$, dann gilt

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \binom{h}{k} \int_{I\!D_z} \phi(z)^k (1-\phi(z))^{h-k} f_z(z)\, dz. \tag{7.6}$$

Im folgenden soll dieser Ausdruck für $k = 0$ betrachtet werden. Dieser Ausdruck bezeichnet dann die Wahrscheinlichkeit, mit der während einer bestimmten Zeit kein Symbolfehler auftritt.

Ist $Z = z_1$ für eine bestimmte Zeit während der ersten h_1 Symbole konstant und wechselt dann auf Wert z_2, der für die nächsten h_2 Symbole konstant ist, usw, dann können wir schreiben

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \int_{I\!D_z}\int_{I\!D_z}\ldots\int_{I\!D_z} (1-\phi(z_1))^{h_1} (1-\phi(z_2))^{h_2} \ldots$$

$$\ldots (1-\phi(z_l))^{h_l} f_z(z_1, z_2, \ldots z_l)\; dz_1 dz_2 \ldots, dz_l, \tag{7.7}$$

mit $\sum_{i=1}^{l} h_i = h$. Dabei wurde angenommen, daß die Verbunddichte von $z_1, z_2, \ldots, z_l$ durch $f_z(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ beschrieben ist. Sind die Ereignisse Z_i unabhängig, wird $f_z(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ zu einem Produkt von eindimensionalen Dichten $f_z(\cdot)$ und es gilt

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \int_{Dz}\int_{I\!D_z}\ldots\int_{I\!D_z} (1-\phi(z_1))^{h_1} f_z(z_1) (1-\phi(z_2))^{h_2} f_z(z_2) \ldots$$

$$\ldots (1-\phi(z_l))^{h_l} f_z(z_l)\; dz_1 dz_2 \ldots dz_l. \tag{7.8}$$

Dieses Fehlermodell wurde von der DLR vorgeschlagen und wurde schon in [?] erwähnt. Es läßt sich so interpretieren, daß der Funkkanal für die Dauer von h_i Symbolen sich jeweils nicht ändert, dann aber völlig unabhängig vom bisherigen Qualitätszustand einen neuen einnimmt. Bei geeigneter Parametrisierung kann dies ein sinnvolles Modell sein, wobei nur die Einschränkung $k = 0$ zu einer überschaubaren Struktur führt.

Es lassen sich nun zwei Grenzfälle konstruieren. Wird eine Sequenz von h Symbolen betrachtet und gilt $h_1 = h$, so folgt

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \int_{\mathbb{D}_z} (1 - \phi(z)\, f_z(z))^h \, dz. \tag{7.9}$$

Offensichtlich ändert sich der Funkkanal für die Dauer der Sequenz nicht. Er ist dann zeitinvariant und die stochastischen Bindungen zwischen den einzelnen Symbolen sind maximal.

Ein zweiter Grenzfall läßt sich für $h_i = 1, i = 1, 2 \ldots h$ formulieren. Gleichung ?? wird dann zu

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i = k\right\} = \prod_{i=1}^{h} \int_{\mathbb{D}_z} (1 - \phi(z_i))\, f_z(z_i)\, dz_i = \left(1 - \int_{\mathbb{D}_z} \phi(z_i)\, f_z(z_i)\, dz_i\right)^h \tag{7.10}$$

Dies ist dann der Fall, wenn mit jedem Symbol der Funkkanal sich ändert, was sicher im terrestrischen Mobilfunk kaum gegeben ist.

In Abb. ?? sind Paketfehlerraten (PER = packet error ratio) in Abhängigkeit des Signal-zu-Rausch-Verhältnises (SNR) nach Gl. ?? berechnet. Dabei wurden DPSK-Modulation und ein nicht-frequenzselektiver Rayleighkanal angenommen. Die Blockgröße h_i wurde variiert von 1 (keine statistischen Bindungen zwischen den Symbolen) bis zur Paketgröße 128 (maximale statistische Bindungen zwischen den Symbolen). Die oberste Kurve gilt für $h_i = 1$ und macht deutlich, daß sich minimale statistische Bindungen negativ auf die Paketfehlerwahrscheinlichkeiten auswirken. Ist dagegen $h_1 = h$, wird also nur ein einziger Block gebildet, können die statistischen Bindungen als maximal angesehen werden. Es ergibt sich dann die unterste Kurve. Das Tupel $(h_i, h/h_i)$ bezeichnet dabei die Blockgröße und und Anzahl der Blöcke, wobei stets eine Sequenz der Länge $h = 128$ betrachtet wurde.

7.1.2 Schwellenmodelle

Um das Problem der Zeitvarianz des Funkkanals möglichst einfach zu modellieren, wurde ein sog. Schwellenmodell entwickelt [?, ?], das ein Datenpaket genau dann als demodulierbar betrachtet, wenn der durchschnittliche Signalpegel, bezogen auf die Paketübertragungsdauer, oberhalb eines Schwellwertes liegt.

Wie im folgenden gezeigt werden soll, stellt dies bei im Vergleich zur Paketübertragungsdauer langsamen Variationen des Funkkanals eine recht gute Approximation dar.

Ein Datenpaket kann aufgrund des *Nah-Fern-Effekts* trotz zeitgleicher Übertragungen anderer Datenpakete korrekt empfangen werden. Voraussetzung ist, daß die mittlere Leistung

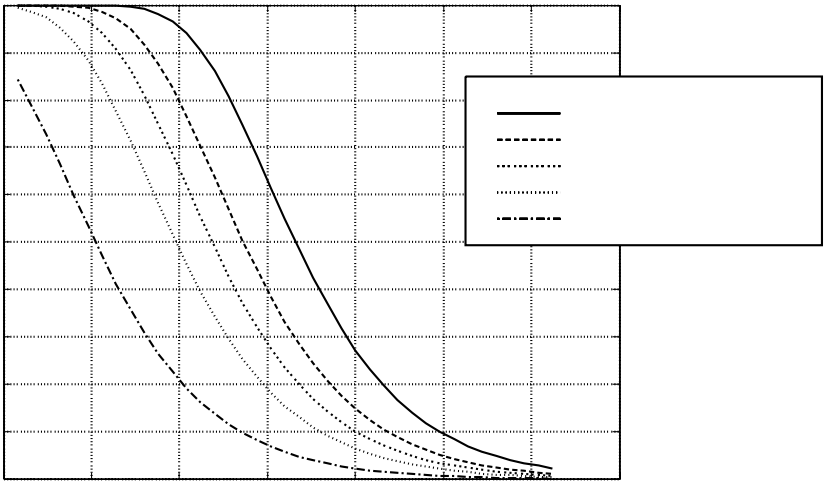

Abb. 7.1 Paketfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des SNR bei verschiedenen Blockgrößen

p_S des Nutzsignals beim Empfänger über die Dauer des gewünschten Datenpaketes die Leistung der störenden Station p_I um eine gegebene Schwelle z_0 übersteigt. Dies entspricht der Annahme eines Schwellenmodells für den Empfangs- bzw. Detektionsvorgang

$$Prob_{cap} = Pr\left\{\frac{p_S}{p_I} > z_0\right\} = Pr\{z > z_0\}. \tag{7.11}$$

Dabei bezeichnet $Prob_{cap}$ die Capture-Wahrscheinlichkeit. Ein Empfänger mit $z_0 = \infty$ (non Capture) kann nur erfolgreich empfangen, wenn die Interferenzleistung gegen Null geht. *Perfect Capture* ($z_0 = 1$) bedeutet, daß der Empfänger das gewünschte Datenpaket selbst dann korrekt demodulieren kann, wenn die sich überlagernden Signale mit gleicher Leistung an der Antenne des Empfängers anliegen.

Die Bestimmung der Schwelle ist ein besonderes Problem. In [**?**] wurde sie für Rice-Fading berechnet, indem man sich an die oben erläuterten Grenzfälle des stochastischen Verhaltens der Symbole von strenger Abhängigkeit und vollständiger Unabhängigkeit orientierte.

In Abb. **??** wurde die Paketfehlerwahrscheinlichkeit für die Schwellen $2, 3$ und 4 bestimmt. Die Kurven für $z_0 = 3$ und $z_0 = 4$ liegen innerhalb des Bereiches, der durch die Extremfälle "völlig abhängig" $(128, 1)$ und "unabhängig" $(1, 128)$ abgesteckt wird.

Nun ist zu klären, wie die statistischen Bindungen genau zu beschreiben sind. Dazu soll ein auf Zustandsmodellen basierendes Modell herangezogen werden.

7.1.3 Auf Zustandsmodellen basierende Paketfehlermodelle

Durch Zustandsmodelle wird sowohl die im vorherigen Abschnitt verwendetete VDF approximiert, wie auch die Zeitvarianz des zu modellierenden Funkkanals in angemessener Weise

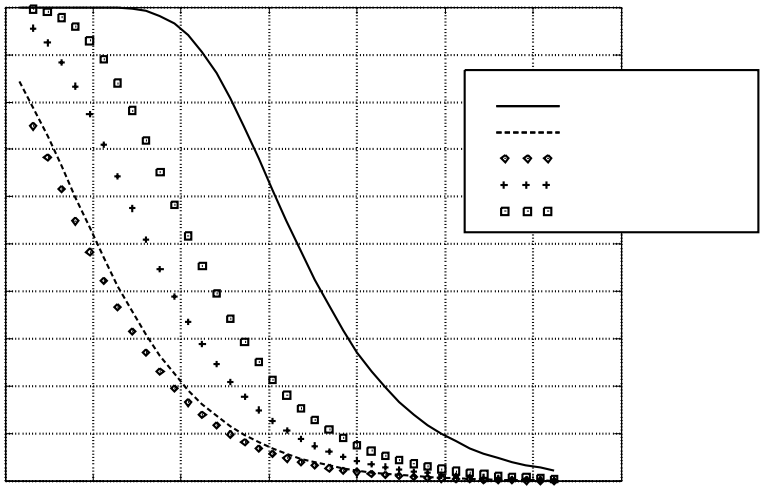

Abb. 7.2 Paketfehlerraten in Abhängigkeit des SNR

berücksichtigt. Dies versetzt uns in die Lage, einfache und dennoch sehr genaue Paketfehlermodelle zu konstruieren.

7.1.3.1 Matrix-Binomial Modell

Wird angenommen, daß der Funkkanal sich nur sehr wenig während der Übertragungszeit der betrachteten Sequenz von Symbolen ändert, kann die Möglichkeit der Übergänge von einem Zustand zu einem anderen vernachlässigt werden.

Ausgehend von der Ableitung in Kap. **??** können wir für die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Sequenz der Länge h sich k fehlerhafte Symbole befinden, schreiben

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i \;=\; k\right\} \;=\; \sum_{j\in E} \gamma_j \binom{h}{k} {\varphi_j}^k {\Delta_j}^{h-k} \;=\; \binom{h}{k} \underline{\gamma}^T \left({\varphi_j}^k {\Delta_j}^{h-k}{}_{j\in\mathbb{E}}\right) \underline{e}. \qquad (7.12)$$

Dabei wird der Startzustand i mit dem zugehörigen Element des Vektors der stationären Zustandsverteilung γ_i berücksichtigt. In Matrixschreibweise erhalten wir

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i \;=\; k\right\} \;=\; \underline{\gamma}^T \,\mathbf{diag}\left(Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i \;=\; k,\; J(h) = j \,|\, J(0) = j\right\}_{j\in\mathbb{E}}\right) \;=$$

$$= \underline{\gamma}^T \binom{h}{k} \mathbf{\Phi}^k \; \mathbf{\Delta}^{h-k} \, \underline{e}. \qquad (7.13)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich kein Fehler in dieser Sequenz befindet, ist

$$Pr\left\{\sum_{i=1}^{h} e_i \;=\; 0\right\} \;=\; \sum_{j\in\mathbb{E}} \gamma_j \, {\Delta_j}^h. \qquad (7.14)$$

Abb. ?? zeigt die Paketfehlerwahrscheinlichkeit nach Gl. ??. Dabei wurde f_d/R_t mit 0.0001, wie im zellularen Mobilfunk üblich, gewählt. Ein Schwellwert von $z_0 = 3$ approximiert dieses Modell am besten. Offensichtlich muß die Schwelle für andere Parameter des Zustandsmodelles, bzw. andere parametrisierende Prozesse, jeweils neu berechnet werden.

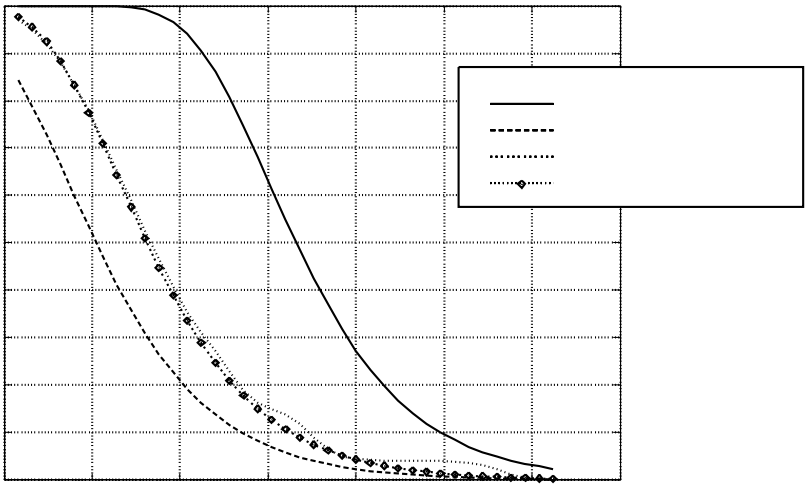

Abb. 7.3 Paketfehlerraten in Abhängigkeit des SNR

7.1.3.2 Approximation durch eine Matrix-Exponential-Funktion

Ähnlich wie der Binomial-Prozeß durch einen Poisson-Prozeß unter bestimmten Voraussetzungen approximiert werden kann, läßt sich auch der MMBP durch einen MMPP approximieren. Dies ist sinnvoll, wenn die Zeitvarianz des Kanal hoch ist und Gl. ?? nicht zu sinnvollen Ergebnissen führt. Die MMPP-Approximation ist um so genauer, je länger die betrachtete Sequenz in bezug auf die zu untersuchende Fehleranzahl ist, da sich dann der diskrete Charakter des MMBP weniger stark auswirkt.

Formal läßt sich diese Approximation durch eine Grenzbetrachtung mit großen zeitlichen Distanzen für die Zählfunktionen der beiden Prozesse vollziehen. Dann muß gelten

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{R_d}(t,n) \stackrel{!}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbf{R_c}(k,n) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.15}$$

dabei ist $\mathbf{R_d}(t,n)$ die Zählfunktion des MMBP und $\mathbf{R_c}(k,n)$ die des MMPP. Da sich die Zählfunktion des MMBP im Zeitbereich nicht geschlossen darstellen läßt, s. Kap. ??, müssen diese Betrachtungen im beschreibenden Bildbereich stattfinden. Es ergibt sich

$$(\mathbf{I} - \mathbf{w})^{-1}\ \mathbf{v} \ = \ (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q})^{-1}\ \mathbf{\Lambda}. \tag{7.16}$$

Die Mittelwerte der bedingten Fehlerabstände sollen identisch sein, dann gilt

$$T\ \mathbf{M_d} \stackrel{!}{=} \mathbf{M_c}, \tag{7.17}$$

wobei die zeitliche Dauer der diskreten Zeittakte T Berücksichtigung finden muß. Es folgt

$$T\ (\mathbf{I} - \mathbf{w})^{-2}\ \mathbf{v} \ = \ (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q})^{-2}\ \mathbf{\Lambda}. \tag{7.18}$$

Damit ergibt sich

$$T\ (\mathbf{I}-\mathbf{w})^{-1}\ =\ (\mathbf{\Lambda}-\mathbf{Q})^{-1}\,. \tag{7.19}$$

Aus Gl. ?? und ?? lassen sich dann $\mathbf{\Lambda}$ und $\mathbf{Q}$ bestimmen. Es folgt

$$\mathbf{Q}\ =\ \frac{1}{T}\,(\mathbf{w}+\mathbf{v}-\mathbf{I})\ =\ \frac{1}{T}\,(\mathbf{q}-\mathbf{I})\,,\qquad \mathbf{\Lambda}\ =\ \frac{1}{T}\,\mathbf{v}. \tag{7.20}$$

Da i.a. Funkkanäle wenig zeitvariant sind und das den Funkkanal als wenig zeitvariant voraussetzende Matrix-Binomial Modell sehr gute Ergebnisse liefert, soll eine genauere Validierung hier unterbleiben.

7.2 Anwendung der Modelle

7.2.1 Das Problem der Unfairness beim Kanalzugriff in zellularen Systemen

Die mathematische Analyse vollvermaschter Stationen hat eine lange Tradition, s. [?]. Es konnten in jüngster Vergangenheit Fortschritte erzielt werden, indem die statistischen Eigenschaften des Funkübertragungsweges modelliert und in die Analyse einbezogen wurden, [?, ?, ?].

Die Leistungsanalyse von Multihop-Netzen erfreute sich vor einigen Jahren besonderer Aufmerksamkeit, obwohl es zu dieser Zeit nur wenige reale Systeme gab, [?, ?, ?].

Viele Veröffentlichungen der jüngeren Zeit bringen keine substantiellen Neuerungen, sondern eher Variationen der schon in o.g. Beiträgen behandelten Thematik[1]. Positiv zu erwähnen ist der Beitrag von [?], in dem die adäquate Dimensionierung der Schwelle des Schwellenmodelles problematisiert wird, und der Beitrag von MATHAR, [?] in dem Grundlegendes zur Modellierung der Topologie beschrieben wird. Der Autor hat ebenfalls das Problem der Topologiemodellierung behandelt, s. [?], wobei eine Unabhängigkeitsannahme vorgenommen wird, die in [?] als inadäquate Näherung bezeichnet wird.

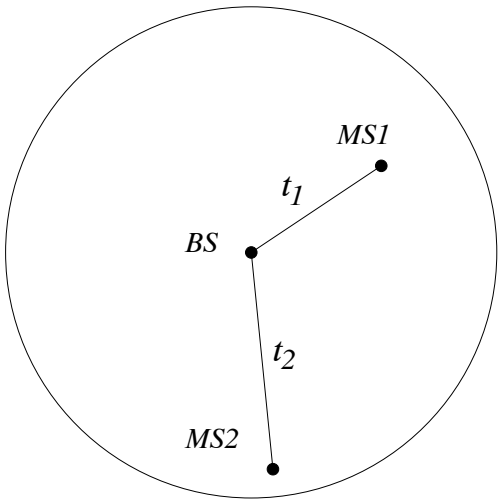

Abb. 7.4 Wettbewerbsszenario im Zellularfunk

Im folgenden wird eine einfache Anwendung der oben diskutierten Modelle gegeben, die eine relevante Problematik thematisiert.

In zellularen Mobilfunksystemen wird i.d.R. von der Basisstation auf Anfrage der Mobilstation eine Kanalreservierung vorgenommen. Dies sichert die ausschließliche Verwendung eines Kanals durch eine Mobilstation für die Dauer einer Verbindung. Im GSM-System wird

[1] [?] bringt spieltheoretische Aspekte, eine Anwendung könnte in der Militärtechnik liegen, Grundlagen bringen [?, ?], [?] integriert Mikro/Makro-Diversität bei Verwendung von realistischen Modellen für den Funkkanal, [?] untersucht Diversität mit einfachen Kanalmodellen, [?] bietet als Dissertation eine exzellente Übersicht.

der Zugriff mit einem *Access-Burst* vorgenommen und dann, bei Erfolg, von der Basisstation bestätigt. Der Zugriff findet nach dem S-ALOHA-Protokoll statt.

Beim Kanalzugriff befindet sich jede Mobilstation im Wettbewerb mit anderen, gleichzeitig auf den Kanal zugreifenden Stationen. Dies soll mit dem Schwellenmodell formal erfaßt werden. Abb. **??** zeigt ein mögliches Wettbewerbsszenario mit zwei Mobilstationen (MS) mit Abständen t_1 und t_2 zu der Basisstation (BS) im Zentrum der Zelle.

Sei die Zufallsvariable s_1 die die Basisstation erreichende Leistung der Mobilstation MS1 und N_0 die die Übertragung beeinflußende Störleistung. Die Erfolgswahrscheinlichkeit (bei alleinigem Zugriff) ist dann

$$\begin{aligned} Pr\{\text{ MS1 sendet } \mid \text{ keine andere MS greift zu }\} = \\ = Pr\{s_1/N_0 > z_0\} = \int_{z_0 N_0}^{\infty} f_s(P)\, dP. \end{aligned} \tag{7.21}$$

I.a. wird ein System so ausgelegt sein, daß die MS, selbst wenn sie sich am Zellrand befindet, mit ausreichend hoher Wahrscheinlichkeit die BS mit ihrem Datenpaket erreichen kann. Dies ist dann der Fall, wenn bei gegebenem SNR im belegten Frequenzband die die BS erreichende Leistung der MS ausreichend groß ist.

Greifen zwei MSn gleichzeitig auf den Kanal zu, ist der Erfolg nicht ohne weiteres gegeben. Dann gilt mit den Zufallsvariablen s_1, s_2, die die Leistungen von MS1 und MS2 am Ort der BS beschreiben,

$$\begin{aligned} Pr\{\text{ MS1 sendet } \mid \text{ eine andere MS greift zu }\} = Pr\{s_1/s_2 > z_0\} = \\ = \int_{z_0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f_s(P\,V \mid P_1)\; f_s(P \mid P_2)\, P\, dP\, dV. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Wird der Kanal durch einen Rayleigh-Prozeß modelliert, ist die stationäre Verteilung der Einhüllenden des Signals die Rayleigh-Verteilung und die den Einhüllenden zugeordneten Leistungen s_1 und s_2 sind exponentiell-verteilt, s. Kap. **??**. Es folgt

$$\begin{aligned} Pr\{s_1/s_2 > z_0 \,|\, t_1, t_2\} &= \int_{z_0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} {t_1}^{\beta} \exp\left\{-P\,V\,{t_1}^{\beta}\right\}\; {t_2}^{\beta} \exp\left\{-P\,{t_2}^{\beta}\right\}\; P\, dP\, dV \\ &= {t_1}^{\beta}\,{t_2}^{\beta} \int_{z_0}^{\infty} \frac{1}{({t_1}^{\beta}\,V + {t_2}^{\beta})^2}\, dV = \frac{{t_2}^{\beta}}{{t_1}^{\beta}\, z_0 + {t_2}^{\beta}}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Dabei wurden die Entfernungen zur BS mit t_1 und t_2 angenommen und für die Leistung in Abhängigkeit der Entfernung t_i von der MS zur BS gilt mit dem Dämpfungskoeffizienten β und der Sendeleistung S_0

$$\bar{P}_i = \frac{S_0}{{t_i}^{\beta}} \qquad i = 1, 2. \tag{7.24}$$

Bei mehr als nur einer einzigen störenden Station kann Gl. **??** als Produkt formuliert werden, s. [**?**, **?**],

$$Pr\left\{ s_1 / \sum_{i=2}^{N} s_i > z_0 \,|\, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_N \right\} = \prod_{i=2}^{N} \frac{1/\bar{P}_i}{\bar{P}_1 z_0 + 1/\bar{P}_i} \tag{7.25}$$

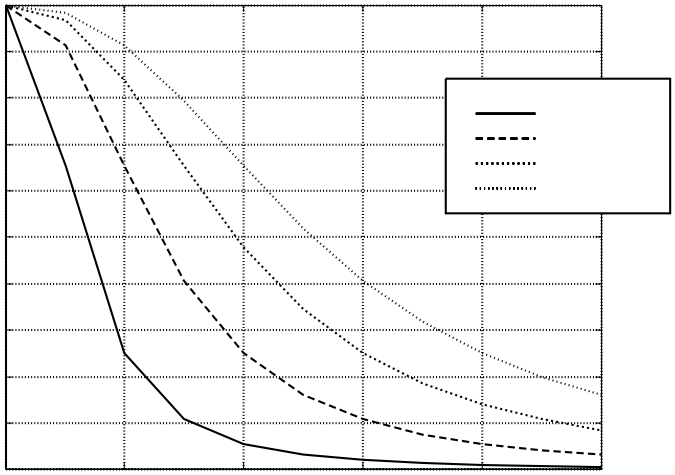

Abb. 7.5 Erfolgswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Position t_2 des Mitbewerbers, $z_0 = 3$

bzw. mit Gl. **??**

$$Pr\left\{ s_1 / \sum_{i=2}^{N} s_i > z_0 \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_N \right\} = \prod_{i=2}^{N} \frac{{t_i}^{\beta}}{{t_1}^{\beta} z_0 + {t_i}^{\beta}}. \tag{7.26}$$

Abb. **??** zeigt die Erfolgswahrscheinlichkeit über der Entfernung t_1 einer Mobilstation zur BS bei einem Mitbewerber im Abstand $t_2 = 2, 4, 6, 8$, $z_0 = 3$. Offensichtlich ist die Erfolgswahrscheinlichkeit in extremer Weise von der relativen Position der beiden Bewerber bzgl. der BS abhängig. Je nach Position des Konkurrenten t_2 in Bezug auf die Position der betrachteten Mobilstation ist die Erfolgswahrscheinlichkeit stark reduziert.

7.2.2 Durchsatz bei gerichteten Antennen, Einfluß der Fehlausrichtung

Gerichtete Antennen erbringen je nach Öffnung der Antennenkeule theoretisch eine Durchsatzsteigerung gegenüber rundstrahlenden Antennen bis zu einem Faktor von vier, da Stationen, die sich nicht in der Nähe des Empfängers befinden, durch die Übertragung nicht gestört werden, s. [**?**]. Dabei wird der Durchsatz als mittlere Anzahl erfolgreicher Datenpakete pro Zeitslot verstanden. Mit den Methoden der stochastischen Simulation wurden entsprechende Untersuchungen vorgenommen und in [**?**, **?**] beschrieben. Dabei wird in [**?**] ein Protokoll zur Verwaltung und Verteilung der Positionsdaten von mobilen Stationen vorgestellt. Mathematische Analysen zu einfachen Modellen für den Funkkanal finden sich in [**?**]. Werden realistische Modelle für den Funkkanal verwendet, kann die nicht immer exakte Ausrichtung der Sendeantenne auf den Empfänger mit in die mathematische Analyse einbezogen werden. Dies soll als weiteres Beispiel für eine Anwendung des Schwellenmodelles dienen.

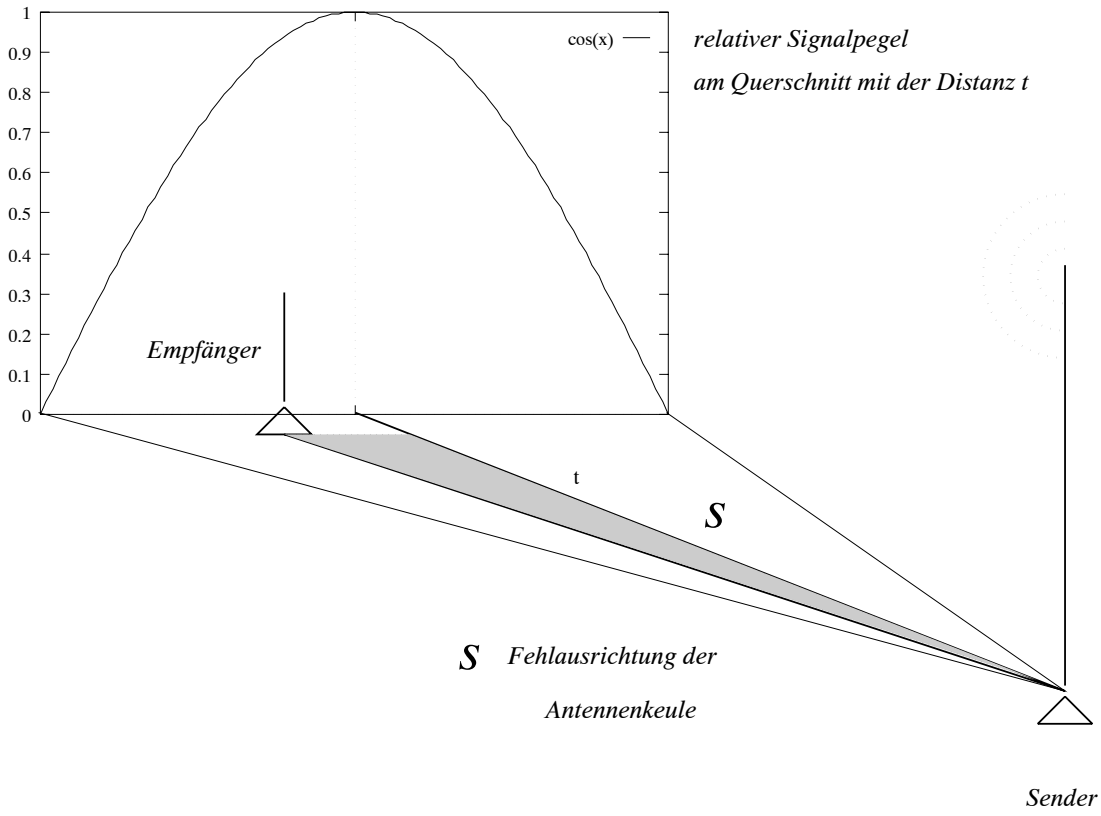

Abb. 7.6 Fehlausrichtung der Antennenkeule einer sendenden Station

Das Hauptproblem, wie sich nach Untersuchungen mit stochastischer Simulation gezeigt hat, ist die nicht ideale Ausrichtung der Antenne auf den beabsichtigten Empfänger. Bild **??** zeigt ein derartiges Szenarium. Weil der Empfänger sich nicht im Maximum der Leistung der auf ihn gerichteten Antenne befindet, sinkt die Wahrscheinlichkeit für den erfolgreichen Empfang. Die Ursache für die nicht optimale Antennenausrichtung kann sowohl die nicht ideale Antenne selbst bzw. die Ansteuerung der Antenne oder auch die ungenauen Positionsdaten des Empfängers sein. Dies soll nun formal erfaßt werden.

Der Gewinn läßt sich nach [**?**] für den Fall einer einseitigen Richtantenne mit einer zweiseitigen Hauptkeulenbreite $\Delta\varphi$ näherungsweise angeben als

$$G_L(\varphi) \quad = \quad 10\ \log(a\ \cos(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi}{\varphi_0})) \quad \text{für} - \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \tag{7.27}$$

Dies gilt unter der Annahme, daß die vertikale gleich der horizontalen Keulenbreite ist. Weiterhin gilt nach [**?**]

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi^2}{(\frac{1}{b}\ \sin(b\,\varphi_0)\ +\ \sin(c\,\varphi_0))\,\varphi_0} & b &= \frac{\pi}{2\,\varphi_0} - 1 \\ c &= \frac{\pi}{2\,\varphi_0} + 1 & \varphi_0 &= \frac{3}{4}\,\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Wird $\Delta\varphi = 20°$ gewählt, ergibt sich ein Gewinn von 20.6 dB in Hauptstrahlrichtung. Nach

einigen Rechnungen ergibt sich

$$\bar{P}_i \;=\; f(\varphi_i) \;=\; G_B(\varphi_i)\; {t_i}^{-\beta} \qquad \text{mit} \quad G_B\,(\varphi_i) \;=\; G_0\,\cos(g\,\varphi_i) \qquad i = 1..N,\; |\varphi_i| \le \varphi_0. \tag{7.29}$$

Nicht nur die den Empfänger erreichende Leistung ist aufgrund der Variation infolge der Mehrwegeausbreitung als Zufallsvariable anzusehen, sondern auch der Winkel, mit dem die gerichtete Antenne ausgerichtet ist. Es sind also Zufallsvariablen $\varphi_i, i = 1..N$ zu unterscheiden, falls insgesamt N Übertragungen betrachtet werden. Für den eigentlichen Sender sei der Winkel φ_1 Gauß-verteilt mit $\varphi_1 \;\sim \mathcal{N}(0, s)$. Die Standardabweichung s ist dann als der von der exakten Ausrichtung abweichende Fehlwinkel zu interpretieren. Die Winkel der gerichteten Antennen aller anderen Stationen können als gleichverteilt im Intervall $(-\pi, \pi]$ angesehen werden, weil die Stationen beliebige andere Stationen erreichen wollen. Es gilt also

$$f_{\varphi_1}\,(\varphi_1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,s}\,\exp\left\{-\frac{{\varphi_1}^2}{2\,s^2}\right\}, \qquad f_{\varphi_i}\,(\varphi_i) \;=\; \frac{1}{2\,\pi} \quad i = 2..N, \tag{7.30}$$

mit $|\varphi_i| \le \varphi_0, i = 1..N$. Die VFn der entsprechenden mittleren Leistungen ergeben sich dann über die Transformationsvorschrift für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, vgl. [**?**], p. 94 ff. Wird für $\bar{P}_1$ die Dichte $f_{\bar{P}_1}(\cdot)$ angenommen, folgt

$$F_{\bar{P}_1}(x) \;=\; Pr\left\{\bar{P}_1 \;\le\; x\right\} \;=\; Pr\left\{\left\{\begin{array}{ll} G_0\,\cos(g\,\varphi_1)\;{t_i}^{-\beta} & |\varphi_1| \le \varphi_0 \\ 0 & |\varphi_1| > \varphi_0 \end{array}\right\} \;\le\; x\right\} \tag{7.31}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_k f_{\varphi_1}\,(\varphi_{1k})\,\frac{d\varphi_{1k}}{d\bar{P}_1}\,d\bar{P}_1 \;+\; \int_{\Omega_2} dPr \tag{7.32}$$

mit $\varphi_{11}, \varphi_{12}...$ alle Lösungen der Umkehrfunktion von $f(\varphi_i) = G_0\,\cos(g\,\varphi)\;{t_i}^{-\beta}$, Gl. **??** und $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit

$$\begin{aligned} \Omega_1 \;&=\; \left\{\omega_1\,||\varphi_1(\omega_1)| \le \varphi_0,\; P_1(\varphi_1(\omega_1)) = G_0\,\cos(g\,\varphi_1(\omega_1))\;{t_i}^{-\beta},\; P_1(\varphi_1(\omega_1)) \le x\right\} \\ \Omega_2 \;&=\; \left\{\omega_2\,||\varphi_1(\omega_2)| > \varphi_0,\; P_1(\varphi_1(\omega_2)) = 0,\; P_1(\varphi(\omega_2)) \le x\right\} \end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned} Pr\left\{\bar{P}_1 \;\le\; x\right\} \;&=\; \int_0^x \bar{f}_{\bar{P}_1}\,(\bar{P}_1)\;d\bar{P}_1 \;+\; \mathbf{1}(0 \le x)\left(\int_{-\pi}^{\varphi_0} f_{\varphi_1}\,(\varphi_1)\,d\varphi_1 \;+\; \int_{\varphi_0}^{\pi} f_{\varphi_1}\,(\varphi_1)\,d\varphi_1\right) \\ &=\; \int_0^x \bar{f}_{\bar{P}_1}\,(\bar{P}_1)\;d\bar{P}_1 \;+\; \mathbf{1}(0 \le x)\;(1 \;-\; \mathrm{erf}(\varphi_0/s))\,, \end{aligned} \tag{7.34}$$

mit der Dichte

$$\bar{f}_{\bar{P}_1}\,(\bar{P}_1) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{{t_1}^{\beta}\,{G_0}^{-1}\,g^{-1}}{\sqrt{2\,\pi}\,s\,\left(1 \;-\; {\bar{P}_1}^2\,{t_1}^{2\beta}\;G_0^{-2}\right)^{1/2}}\;\exp\left(-\dfrac{\arccos^2\left(\dfrac{\bar{P}_1\,{t_1}^{\beta}}{G_0}\right)}{2\,s^2\,g^2}\right) & \\ & \text{für} \quad 0 \le \bar{P}_1 \le G_0\,{t_1}^{-\beta} \\ 0 & \text{sonst.} \end{array}\right. \tag{7.35}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}(\cdot)$ die Indikatorfunktion und $\mathrm{erf}(\cdot)$ die Fehlerfunktion. Für die störenden Stationen ergibt sich nach analogen Überlegungen bzgl. der Mengen Ω_1, Ω_2 mit $i = 2..N$

$$Pr\left\{\bar{P}_i \;\le\; x\right\} \;=\; \int_0^x \bar{f}_{\bar{P}_i}\,(\varphi_1)\;d\bar{P}_1 \;+\; \mathbf{1}(0 \le x)\left(1 \;-\; \frac{\varphi_0}{\pi}\right) \quad \text{mit } i = 2..N \tag{7.36}$$

$$\bar{f}_{\bar{P}_i}(\bar{P}_i) = \begin{cases} \dfrac{{t_1}^{\beta}\, {G_0}^{-1}\, g^{-1}}{2\pi \left(1 - {\bar{P}_i}^2\, {t_1}^{2\beta}\, G_0^{-2}\right)^{1/2}} & \text{für} \quad 0 \le \bar{P}_i \le G_0\, {t_i}^{-\beta} \quad \text{mit } i = 2..N \\ \\ 0 & \text{sonst} \quad \text{mit } i = 2..N. \end{cases} \tag{7.37}$$

Diese Funktionen $\bar{f}_{\bar{P}_i}(\cdot), i = 1..N$ sind keine echten VDFn, da die Vollständigkeitsbedingung nicht erfüllt ist. Anschaulich ist dieser Sachverhalt daran zu erkennen, daß die den Sender erreichende Leistung für Fehlwinkel, die jenseits der ersten Nullstelle des Cosinus liegen, verschwindet, s. Gl. **??**. Insofern sind diese Funktionen durch entsprechend gewichtete Dirac-Stöße im Nullpunkt zu ergänzen, die sich formal aus der Ableitung der Indikatorfunktion in Gl. **??** ergeben. Die Gewichtung entspricht der Wahrscheinlichkeit, mit der der Fehlwinkel zu Leistungen von Null führt. Es folgt

$$f_{\bar{P}_i}(\bar{P}_i) = \bar{f}_{\bar{P}_i}(\bar{P}_i) + \alpha_i\, \delta(\bar{P}_i) \tag{7.38}$$

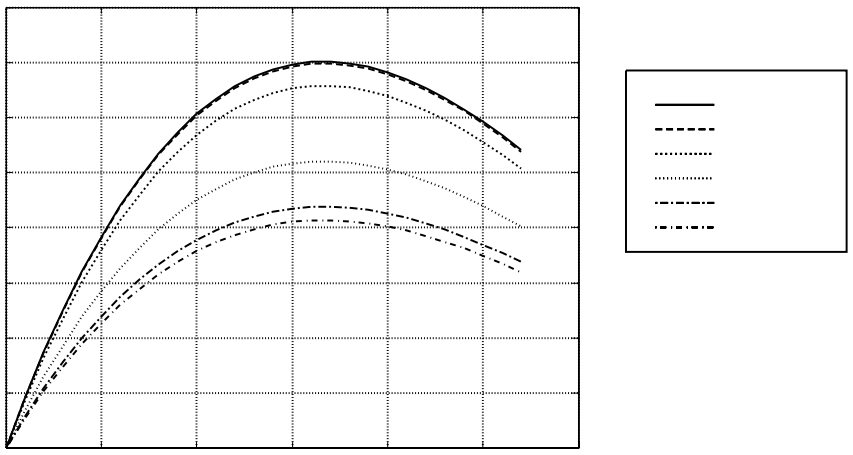

Abb. 7.7 Durchsatz bei unterschiedlichen Fehlwinkeln über der Sendewahrscheinlichkeit p pro Zeitschlitz bei Rayleigh-Kanälen

mit $\alpha_i = 1 - \varphi_0/\pi$ für $i = 2..N$ und $\alpha_1 = 1 - \mathrm{erf}(\varphi_0/s)$. Letztere Gl. resultiert aus der Integration von Gl. **??** über die Intervalle $(-\pi, -\varphi_0]$ und $(\varphi_0, \pi]$.

Offensichtlich bilden sich jeweils Pole bei $\bar{P}_i = G_0\, {t_1}^{-\beta}$, s. Gl. **??**, die bei numerischer Integration adäquat berücksichtigt werden müssen. Diese so erhaltenen VDFn können nun in Gl. **??**, bzw. Gl. **??** eingesetzt werden. Es folgt für Gl. **??**

$$Prob_{cap}(N) = Pr\left\{ s_1 / \sum_{i=2}^{N} s_i > z_0 \right\} = f_{\bar{P}_1}(\bar{P}_1) \prod_{i=2}^{N} \frac{1/\bar{P}_i}{\bar{P}_1 z_0 + 1/\bar{P}_i}\, f_{\bar{P}_i}(\bar{P}_i). \tag{7.39}$$

Werden dagegen keine weiteren statistischen Schwankungen des Signals angenommen, muß Gl. **??** verwendet werden.

Nun kann der mittlere Durchsatz pro Slot bestimmt werden. Nach [?] berechnet sich der Durchsatz, der die erfolgreiche Anzahl übertragener Datenpakete pro Zeitschlitz beschreibt, als

$$\mathbf{E}\,[\,D\,] \;=\; p\;(1\;-\;p)^{M}\;Prob_{cap}(N-1), \tag{7.40}$$

falls $N-1$ störende und M schweigende Stationen betrachtet werden und p die Sendewahrscheinlichkeit pro Zeitschlitz bezeichnet.

Abb. ?? zeigt den Durchsatz in Prozent über der Sendewahrscheinlichkeit p in Prozent bei unterschiedlichen Fehlwinkeln s unter Verwendung von Gl. ??. Es zeigt sich, daß Fehlwinkel von 10° den Durchsatz noch nicht erheblich beeinträchtigen, die Reduktion beträgt ca. 4.5%. Bei einem Fehlwinkel von 16° ist dagegen schon mit einer Reduktion von 25.8%. zu rechnen, 7° wirken sich dagegen kaum auf den Durchsatz aus. Es wurde analog der Ergebnisse in [?] mit $\beta = 2.0$ (Sichtverbindung), $t_1/t_i = 5, i = 2, 3...$ N=3, M=3 gerechnet. Abb. ?? zeigt den Durchsatz für deterministische Funkkanäle, also ohne Rayleigh-Fading. Unter Verwendung von Gl. ?? ergibt sich hier ein ähnliches Ergebnis wie im vorangegangenen Fall. Abb. ?? zeigt den Durchsatz für $N = 5$ aktive Nachbarstationen, die Degradation ist jeweils leicht angestiegen.

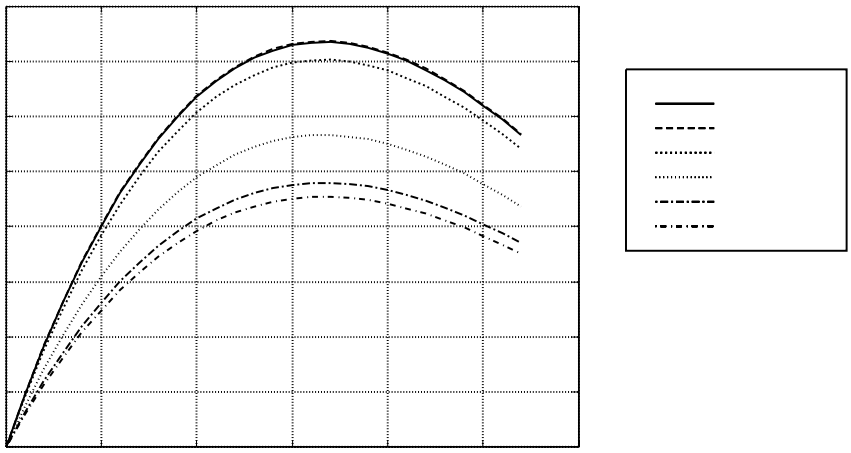

Abb. 7.8 Durchsatz bei unterschiedlichen Fehlwinkeln s bei deterministischen Kanälen

In [?] wurde ein entsprechendes Szenarium mit stochastischer Simulation untersucht. Dabei wurden 100 Stationen auf eine Kugeloberfläche nach der Poisson-Verteilung plaziert, die in jedem Zeitschlitz mit den oben geschilderten gerichteten Antennen nach Maßgabe der Sendewahrscheinlichkeit und eines Routingalgorithmus nach dem Min-Hop-Verfahren ihre jeweiligen Nachbarn mit Datenpaketen zu erreichen versuchen. Die Ergebnisse stimmen überein.

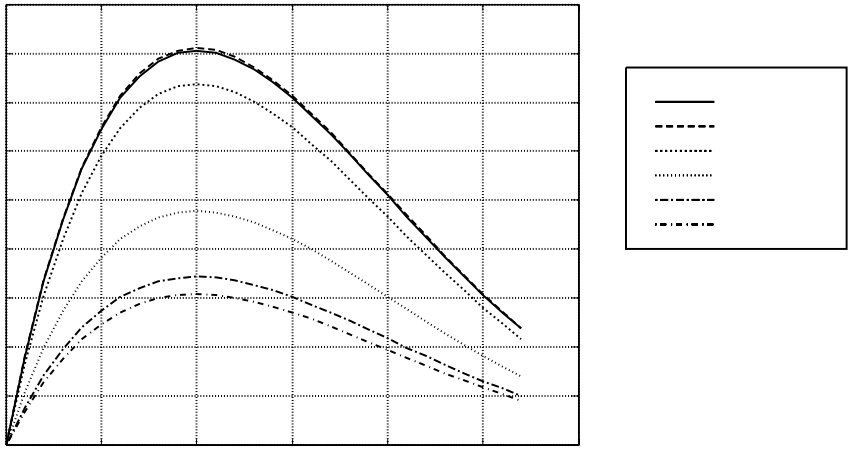

Abb. 7.9 Durchsatz bei unterschiedlichen Fehlwinkeln s, deterministische Kanäle, N=5

7.3 Gedächtnisbehaftete Paketfehlermodelle

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Fehlerhaftigkeit eines Paketes den Funkkanal ausreichend modelliert. Ein weiteres Bestimmungsstück ist jedoch auch die Korrelation der Paketfehler. In [?] wird ein Markov-Modell für Paketfehler vorgestellt, das über einen Musterprozeß für den Funkkanal und Annahmen über Modulationsverfahren und Paketgröße parametrisiert wurde.

Nun sollen mit Hilfe der Matrixalgebra Modelle hergeleitet werden, bei denen durch die Matrixposition der Elemente bzw. Paketfehlerwahrscheinlichkeiten ein Gedächtnis über den Kanalzustand besteht. Insofern handelt es sich bei den im folgenden abgeleiteten Paketfehlerwahrscheinlichkeiten jeweils um auf den Kanalzustand bedingte Wahrscheinlichkeiten.

7.3.1 Fehlermodelle erster Art

Hier soll die Anzahl von Fehlern in einer Datensequenz der Länge h als Kriterium für die Fehlerhaftigkeit gewählt werden. Bei der Verwendung von Blockcodes kann dies ein sinnvolles Kriterium sein, um das Verhalten des Codes zu beschreiben. Offensichtlich ist dieses Kriterium äquivalent zum Modell in Kap. **??**. Nun soll aber der Zustandswechsel des Kanals über den Verlauf von mehreren Datensequenzen als bedeutsam erachtet und explizit modelliert werden.

Die Übergangsmatrix der Ordnung h gibt den Kanalzustand am Ende der Datensequenz an,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^h. \tag{7.41}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von l Fehlern in der Sequenz von h

Symbolen ist dann unter der Voraussetzung, daß sich der Kanal für die Länge der Sequenz in einem einzigen Zustand i befunden hat,

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \binom{h}{l} \mathbf{\Phi}^{l} \mathbf{\Delta}^{h-l}, \tag{7.42}$$

wobei die Diagonalelemente der Matrix $\tilde{\varphi}_i$ den Zustand i betreffen, vgl. auch Gl. **??**. Analog Kap. **??** ist dies eine adäquate Approximation für langsam variierende Kanäle. $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ bezeichnet nun die bedingte Paketfehlerwahrscheinlichkeit analog zu $\mathbf{\Phi}$, der bedingten Symbolfehlerwahrscheinlichkeit. Entsprechend der Nicht-Fehlerwahrscheinlichkeit $\mathbf{\Delta}$ können wir schreiben

$$\tilde{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}. \tag{7.43}$$

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{\Delta}}$ sind in gleicher Weise zu verwenden wie die sich auf einzelne Symbole beziehenden Wahrscheinlichkeiten.

Hier wird deutlich, daß dieses Paketfehlermodell nur für wenig zeitvariante Funkkanäle konstruiert werden kann, da die Aufenthaltsdauer in einem Zustand möglichst die Dauer des Paketes bzw. der Datensequenz übersteigen muß. Dies kann für die *einfachen Zustandsmodelle* wie sie in Kap. **??** beschrieben wurden, nicht ohne weiteres angenommen werden, da sie ganz anders konstruiert werden.

7.3.1.1 Exakte Modelle

Die exakte Berechnung ist nur für kleine Fehlerzahlen möglich. Sie greift direkt auf die Sequenz der sich einstellenden Teilsequenzen von Fehleren bzw. Nicht-Fehlern im Fehlerprozeß zurück:

$$\left(Pr\left\{ \sum_{i=1}^{h} e_i = 1 \right\} \right) = \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{w}^{i} \, \mathbf{v} \, \mathbf{w}^{h-i-1}. \tag{7.44}$$

Verallgemeinert für eine beliebige Anzahl von Fehlern gilt dann

$$\left(Pr\left\{ \sum_{i=1}^{h} e_i = k \right\} \right) =$$

$$\underbrace{\sum_{i_1=0}^{h-k} \sum_{i_2=0}^{h-k-i_1} \sum_{i_3=0}^{h-k-i_1-i_2} \cdots \sum_{i_k=0}^{h-k-i_1-i_2 \ldots - i_{k-1}}}_{k\,mal} \mathbf{w}^{i_1} \, \mathbf{v} \, \mathbf{w}^{i_2} \, \mathbf{v} \, \mathbf{w}^{i_3} \, \mathbf{v} \, \ldots \, \mathbf{w}^{i_k} \, \mathbf{v} \, \mathbf{w}^{h-k-i_1-i_2-i_3 \ldots - i_k}. \tag{7.45}$$

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit kann nur für kleine $k \in \mathbb{N}$ ausgewertet werden, eine weitere Validierung soll deshalb unterbleiben.

7.3.2 Fehlermodelle zweiter Art

Hier soll die Anzahl von hintereinander liegenden Fehlern als Fehlermaß für die Fehlerhaftigkeit einer Datensequenz gewählt werden. Bei Faltungscodern kann dies ein sinnvolles Kriterium sein. Auf die konkrete Parametrisierung bei gegebenen Code kann hier nicht eingegangen werden.

Die bedingte Paketfehlerwahrscheinlichkeit ist dann

$$\breve{\mathbf{\Phi}} \;=\; \sum_{j=0}^{h-l} \mathbf{w}^{\,j}\;\mathbf{v}^{\,l}\;\mathbf{w}^{\,h-l-j}. \tag{7.46}$$

Dies beinhaltet noch die jeweiligen Zustandswechsel innerhalb der Datensequenz. Wird auch hier ein wenig zeitvarianter Kanal angenommen, gilt für die bedingte Paketfehlerwahrscheinlichkeit

$$\check{\mathbf{\Phi}} \;=\; \sum_{j=0}^{h-l} \mathbf{\Delta}^{\,j}\;\mathbf{\Phi}^{\,l}\;\mathbf{\Delta}^{\,h-l-j} \;=\; (h-l+1)\;\mathbf{\Phi}^{\,l}\;\mathbf{\Delta}^{\,h-l}. \tag{7.47}$$

7.3.3 Theoretische Modelle für das Interleaving

In Abb. **??** ist die Abbildung der Eingangssymbole auf eine Sequenz von Ausgangssymbolen bei idealem Interleaving dargestellt.

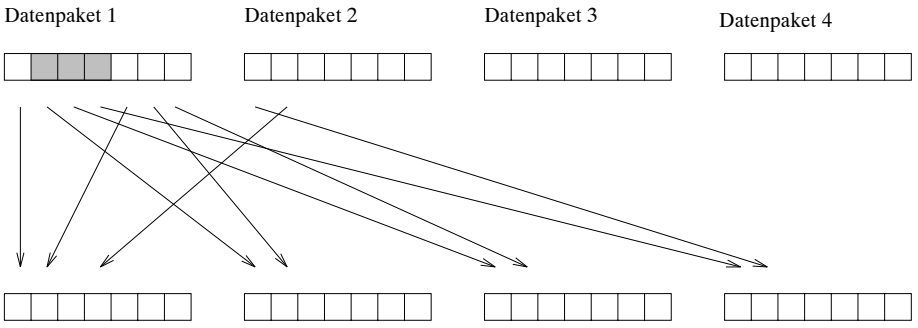

Abb. 7.10 Idealer Interleaver der Tiefe 4

Wie Abb. **??** zeigt, ist es für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anzahl von Fehlern in Folge unerheblich, daß die ursprünglichen Nachbarsymbole eines Symbols in einer bestimmten *endlichen zeitlichen Distanz* nun über den Kanal übertragen werden. Entscheidend für die Wahrscheinlichkeit, daß l fehlerhafte Symbole hintereinander auftreten, ist das Verhalten des Kanals auf das k-te Symbol der Ausgangssequenz bei Interleavertiefe k, weil dieses nun das neue Nachbarsymbol ist. Und das nächste Nachbarsymbol war im Eingangsstrom wiederum k Positionen weiter entfernt angeordnet.

Der Algorithmus des Interleavens soll nun dem Kanal zugerechnet werden. So reduziert der interleavte Kanal seine Gedächtnisbehaftung dadurch, daß er um k Zeitabschnitte separierte Symbole nebeneinander fügt. Im Zustandsmodell muß infolgedessen die modulierende Markovkette sich um k Zeitabschnitte weiter bewegen, bis sie wieder ein evtl. fehlerbehaftetes

Symbol erzeugen darf. In der Zeit zwischen zwei Symbolen produziert der Kanal also weder Fehler noch Nichtfehler, sondern versucht durch Fortgang der Zeit über $k-1$ Takte eine möglichst hohe Gedächtnislosigkeit zu erreichen. Die Matrizen $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$ müssen geeignet transformiert werden. Dies geschieht nach Eigenschaft der Markov-Ketten durch Potenzierung mit $k-1$. Dann läßt sich formal für die Wahrscheinlichkeit, das nächste Fehlersymbol zu generieren, schreiben

$$\mathbf{w}' = \mathbf{q}^{k-1}\,\mathbf{\Phi}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}^{k-1}\,\mathbf{w}. \tag{7.48}$$

Analog ist die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Schritt kein Fehlersymbol zu generieren,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}^{k-1}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}^{k-1}\,\mathbf{v}. \tag{7.49}$$

Die Wahrscheinlichkeit, l fehlerhafte Symbole hintereinander zu generieren, ist dann $\mathbf{v}'^{\,l}$.

Stochastische Simulationen bestätigen diesen formalen Zusammenhang. Es ist dabei unerheblich, daß die Symbole über eine lediglich *endliche* Zeit verteilt werden, wenn das Verhalten auf die entsprechenden Nachbarsymbole wie oben beschrieben modelliert wird.

Beiträge zu einer Systemtheorie für digitale Kommunikationssysteme unter Einschluß stochastischer Medien

8.1 Systemtheoretische Modellierung

Der Begriff *systemtheoretische Modellierung* umfaßt im engeren Sinn die formale Beschreibung eines größeren Systems, das eine simple Funktionalität, bzw. Eingabe/Ausgabe-Relation übersteigt. Die klassische formale Systemtheorie wurde für die Beschreibung des Funkkanals eingesetzt. Dabei wurden stochastische Erweiterungen der linearen Systemtheorie wegen der nicht-deterministischen Eigenschaften des Funkkanals genutzt.

Das Zusammenwirken mehrerer funktionaler Einheiten, wie es bei der Mobilkommunikation geschieht, kann auch mit anderen systemtheoretischen Ansätzen erfaßt werden. So wurde z.B. in Kap. **??** die Wahrscheinlichkeitstheorie genutzt, um Funkkanal, Kanalzugangsprotokoll und Kommunikationswunsch für mehrere Stationen formal zu erfassen. Dabei konnte sogar die nicht exakte Ausrichtung der gerichteten Antenne als nachteilig für das Gesamtsystem mit in die Analyse einbezogen werden.

Nun soll ein auf stochastischen Automaten basierender systemtheoretischer Ansatz vorgenommen werden. Es wird sich zeigen, daß dieser Ansatz sehr viel leistungsfähiger ist, jedoch ohne Rechnerunterstützung nicht auskommt.

Systeme mit probabilistischen Zustandsübergängen, wie sie als Modelle für den Mobilfunkkanal verwendet wurden, können als probabilistische Automaten aufgefaßt werden. Zusammen mit den Modellen der deterministischen Automaten, wie sie bei der Untersuchung von Kommunikationsprotokollen eingesetzt werden, bilden sie die stochastischen Automaten.

Der Begriff des endlichen Automaten enstand im Zusammenhang mit Untersuchungen über sequentielle diskrete Schaltsysteme, Huffmann (1954). In Arbeiten von Mealy (1955) und Moore (1956) wurde eine Algebraisierung eingeführt. Die Theorie der stochastischen Automaten wurde in den sechziger Jahren insbesondere von Bucharajew (UdSSR), Carlyle (USA) und Starke (DDR) entwickelt. Dabei gehen die Ansätze schon auf Shannon und v. Neumann zurück.

Die Automatentheorie hat heute Bedeutung bei Entwurf und Leistungsanalyse von Protokollen, da diese i.a. auf erweiterten endlichen Automaten basieren.

Von L. KITTEL wurde schon in [?, ?, ?] ein automatentheoretischer Ansatz vorgenommen, der maßgeblich matrizentheoretische Algorithmen verwendet. Gegenüber der Markov-Theorie werden diese in einer erweiterten Form verwendet. Dabei werden die beschreibenden Matrizen sehr schnell relativ groß, da beim Zusammenfassen von Automaten zu einem gemeinsamen Automaten die Mächtigkeit der einzelnen Zustandsmengen multiplikativ die Mächtigkeit der gemeinsamen Zustandsmenge ergibt.

Ein weiteres Problem liegt im Verwaltungsaufwand, der bei der Formulierung der einzelnen Automaten und beim Zusammenfassen zum jeweils gemeinsamen Automaten entsteht.

Im folgenden wird ein neuer formal-logischer Ansatz entwickelt, der die oben genannten Probleme umgeht. Dabei werden mit Hilfe der Prädikatenlogik formal-logische Regeln formuliert, die das Zusammenfassen von Automaten sehr effizient ermöglichen; i.a. bietet sich eine rechnerunterstützte Verwaltung an. Andererseits übersteigen die beschreibenden Matrizen nicht die minimal mögliche Größe, da alle redundanten Übergänge automatentheoretisch eliminiert werden[1].

Notwendige Voraussetzung dafür ist die automatentheoretische Erfassung des Funkkanals. Insofern sind die ersten Kapitel dieser Arbeit Grundlage für die folgenden automatentheoretischen Modellierungsansätze, mit denen alle in digitalen Kommunikationssystemen auftretenden Module einheitlich erfaßt und verwaltet werden können.

8.2 Theorie stochastischer Automaten

Ein *stochastischer Automat* läßt sich als eine Verallgemeinerung eines deterministischen Automaten auffassen. Ausgehend vom Begriff des determinierten Automaten sind verschiedene sinnvolle Verallgemeinerungen denkbar.

In der Literatur sind die deterministischen *Moore-* und *Mealy-Automaten* ausgiebig dargestellt, [?, ?]. Hier soll eine Modifikation des Modells aus [?] erweitert werden.

Zu den Bestimmungselementen eines deterministischen Automaten gehören stets die Input-, Output-, und Zustands-Mengen, die mit $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{S}$ bezeichnet werden. Anstelle der determinierten Abbildung δ_t (Überführungsfunktion) und δ_o (Ergebnisfunktion) eines determinierten Automaten, $\delta_t : \mathbb{X} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ und $\delta_o : \mathbb{X} \times \mathbb{S} \to \mathbb{Y}$, die wir auch in einer Abbildung $\delta : \mathbb{X} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathbb{Y}$ zusammenfassen können, liegen bei stochastischen Automaten indeterminierte und auch unscharfe Zuordnungen vor. In den bisherigen Kapiteln dieser Arbeit wurden stochastischer Zuordnungen und damit stochastischen Automaten dargestellt. Demgemäß sind wahrscheinlichkeitstheoretische Maße einzuführen.

Neben den Input-, Output-, und Zustandsmengen ist also als weiteres Bestimmungselement eines stochastischen Automaten die Wahrscheinlichkeit $Pr\{s', y \,|\, s, x\}$ vorzugeben, daß der Automat bei anliegendem Input $x \in \mathbb{X}$ und vorliegendem Zustand $s \in \mathbb{S}$ das Outputsymbol

[1] Anders als in [?, ?, ?] existieren keine Transitionen mit der Wahrscheinlichkeit Null.

$y \in \mathbb{Y}$ ausgibt und in den Zustand $s' \in \mathbb{S}$ übergeht.

Jedem Paar x, s, mit $x \in \mathbb{X}$ und $s \in \mathbb{S}$ ist damit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge $\mathbb{S} \times \mathbb{Y}$ zugeordnet, die jedem Paar s', y mit $s' \in \mathbb{S}$ und $y \in \mathbb{Y}$ eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet, nämlich $Pr\{s', y \,|\, s, x\}$ mit

$$0 \;\leq\; Pr\{s', y \,|\, s, x\} \;\leq\; 1 \tag{8.1}$$

und

$$\sum_{s' \in \mathbb{S}, y \in \mathbb{Y}} Pr\{s', y \,|\, s, x\} \;=\; 1. \tag{8.2}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß läßt sich somit auch als eine Abbildung der Menge $\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S}$ in das reelle Intervall $[0, 1]$ auffassen. In [**?**] werden diese Maße zu Systemen von Matrizen zusammengefaßt.

Wir definieren nun:
Definition 10 (*endliches stochastisches System* (finite stochastic system, FSS))
FSS := ($\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbf{P}$) : <=>

$\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$	endliche Mengen: Zustands-, Eingabe-, Ausgabe- (state, input, output) Mengen
Pr: $\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \to (0, 1]$	Wahrscheinlichkeitsmaß für den Zustandsübergang
$\delta_i : \mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S}$	Überführungsfunktion (transition function)
$\delta_o : \mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$	Ausgabefunktion (output function)

Weiterhin bezeichnen wir

$\mathbb{S}$	Menge der (internen) Zustände der Kommunikationsmoduln, bzw. des Kommunikationsmediums
$\mathbb{X}$	Menge der Inputsymbole, Inputalphabet; im Kontext der Kommunikationstheorie sind dies Datensymbole bzw. Sequenzen von Datensymbolen
$\mathbb{Y}$	Menge der Outputsymbole, Outputalphabet, bzw. Datensymbole, bzw. Sequenzen von Datensymbolen
$\mathbf{P} = (P_{s,x}(s', y)_{x \in \mathbb{X}; y \in \mathbb{Y}; s, s' \in \mathbb{S}})$	
$= (Pr\{s', y \,|\, s, x\}_{x \in \mathbb{X}; y \in \mathbb{Y}; s, s' \in \mathbb{S}})$	System von $(\lvert\mathbb{S}\rvert, \lvert\mathbb{S}\rvert)$-Matrizen mit

$$\sum_{s' \in \mathbb{S}, y \in \mathbb{Y}} Pr\{s', y \,|\, s, x\} \;=\; 1. \tag{8.3}$$

□

Dabei interpretieren wir $Pr\{s', y \,|\, s, x\}$ mit $x \in \mathbb{X}; y \in \mathbb{Y}; s, s' \in \mathbb{S}$ als die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß das FSS im Zustand s im Takt t bei Eingabe von x den Output ebenfalls im Takt t ausgibt und ohne Zeitverlust nach s' übergeht[2]. Man beachte, daß das Wahr-

[2]Diese Funktionsweise weicht von der in [**?**] beschriebenen ab, da in den dort beschriebenen Automaten eine Transition nicht als zeitlos angesehen wird. Beim Übergang verstreicht die Zeit der Einheitslänge.

scheinlichtkeitsmaß nun im linksseitig offenen Intervall definiert ist, so daß unmögliche Zustandsübergänge, im Gegensatz zu den in [?, ?, ?] vorgestellten Modellen, ausgeschlossen werden.

Die Zustandsübergänge, d.h. Transitionen, lassen sich durch Relationen τ beschreiben, die die Elemente der verschiedenen Mengen verknüpfen,

$$\tau \quad \subseteq \quad \mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \times (0,1]. \tag{8.4}$$

Die Relation $\tau(s, x, y, s', p)$ besagt, daß ein Übergang von s nach s' unter Ausgabe von y mit Wahrscheinlichkeit p erfolgt für den Fall, daß das Symbol x am Eingang des Automaten anliegt.

Üblicherweise werden die Mengen $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ durch das leere Symbol e auf $\mathbb{X} \cup \{e\}$ und $\mathbb{Y} \cup \{e\}$ erweitert. Damit lassen sich verschiedene Typen von Transitionen realisieren. So ist es z.B. möglich, daß durch die Ausgabe von e und die Interpretation dieses Symbols als leeres Symbol die Transition als ausgabeunabhängig interpretiert werden kann. In diesem Fall ist es nicht notwendig, oben erläuterte Definitionen zu modifizieren. Um der genaueren Erläuterung und der einfacheren Lesart willen soll jedoch nun eine Klassifizierung der Transitionen stattfinden. FSS, die ausschließlich aus einer Klasse von Transitionen bestehen, können dann einfacher charakterisiert werden. Es werden sechs Klassen von Transitionen definiert:

probabilistisch-bedingte (CP)
probabilistische (P)
bedingte (C)

} Transitionen mit (A) / ohne Ausgabe von Symbolen,

die kurz als CPA,CP,PA,P,CA,C bezeichnet werden sollen.

Formal gilt dann

Klassen	Relationen			Kommentar
Klasse 1:	τ_1	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \times (0,1]$	Ein- und Ausgabe, CPA
	P_1 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S} \to (0,1]$	
	δ_1 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S} \times \mathbb{Y}$	
Klasse 2:	τ_2	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{S} \times (0,1]$	nur Eingabe, keine Ausgabe, CP
	P_2 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{S} \to (0,1]$	
	δ_2 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S}$	
Klasse 3:	τ_3	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S}$	rein probabilistisch,
	P_3 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$	mit Ausgabe, PA
	δ_3 :		$\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathbb{Y}$	
Klasse 4:	τ_4	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times (0,1]$	rein probabilistisch,
	P_4 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$	keine Ausgabe, P
	δ_4 :		$\mathbb{S} \to \mathbb{S}$	

Offensichtlich gilt $\tau_1 = \tau$.

$\tau_2(s, x, s', p)$ besagt, daß ein Übergang von s nach s' mit Wahrscheinlichkeit p erfolgt für den Fall, daß das Symbol x anliegt. Analog sind τ_3 und τ_4 zu verstehen.

Ein FSS, für das gilt $\tau \subseteq \tau_3 \cup \tau_4$, kann als endliches probabilistisches System (finite probabilistic System, FPS) aufgefaßt werden. Es ist offensichtlich durch ein 2-Tupel mit FPS $= (\mathbb{S}, \mathbf{P})$ beschrieben.

Gibt es nun für ein (s, s') genau ein x_0, so daß $Pr\{s', y \,|\, s, x_0\} = 1$ und $Pr\{s', y \,|s, x\} = 0$ für $x \neq x_0$, dann kann die Transition von s nach s' als deterministisch interpretiert werden. Gilt dies für alle Transitionen eines FSS, ist es sinnvoll, die Information auf andere Weise als in $\mathbf{P}$ zu vermitteln. Wir erhalten dann das deterministische System, vgl. Definition 10, mit dem Tripel

Definition 11 (*endliches deterministisches System* (finite deterministic system, FDS))
FDS $:= (\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{Y},) :<=>$

$\mathbb{S}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$		endliche Mengen (Zustands-, Input-, Output-)
δ_i :	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S}$	Überführungsfunktion
δ_o :	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$	Ausgabefunktion.

□

Die Transitionen eines DSS basieren auf den folgenden Relationen mit den zugehörigen Abbildungen, so daß sechs Klassen von Transitionen möglich sind:

Klasse 5:	τ_5	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{S}$	Ein- und Ausgabe, CA
	δ_5:		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S} \times \mathbb{Y}$	

Klasse 6:	τ_6	$\subseteq$	$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{S}$	nur Eingabe, keine Ausgabe, C
	δ_6 :		$\mathbb{S} \times \mathbb{X} \to \mathbb{S}$	

Dabei ist δ_5 als eingabeabhängige Transition und δ_6 als ein- und ausgabeabhängige Transition zu verstehen.

Die Erweiterungen von $\mathbb{S}$ auf Monoide von $\mathbb{S}$, d.h. auf Hintereinanderreihungen von Symbolen, soll hier unterbleiben.

8.3 Verschmelzen von FSS

Bei der Untersuchung der Erreichbarkeit von Zuständen zweier miteinander kommunizierender Automaten wird der aus beiden Automaten bestehende gemeinsame Automat gebildet [?]. Im folgenden sollen Regeln angegeben werden, nach denen sich aus zwei oder mehreren FSSs ein gemeinsames FSS (Common FSS, CFSS) bilden läßt. Insofern wird eine stochastische Erweiterung des Regelwerkes abgeleitet, das schon in deterministischer Variante beschrieben wurde, vgl. [?, ?].

Sei F* ein FSS mit F*= ($\mathbb{S}^*, \mathbb{X}^*, \mathbb{Y}^*, \mathbf{P}^*$) und F** ein FSS mit F**= ($\mathbb{S}^{**}, \mathbb{X}^{**}, \mathbb{Y}^{**}, \mathbf{P}^{**}$).

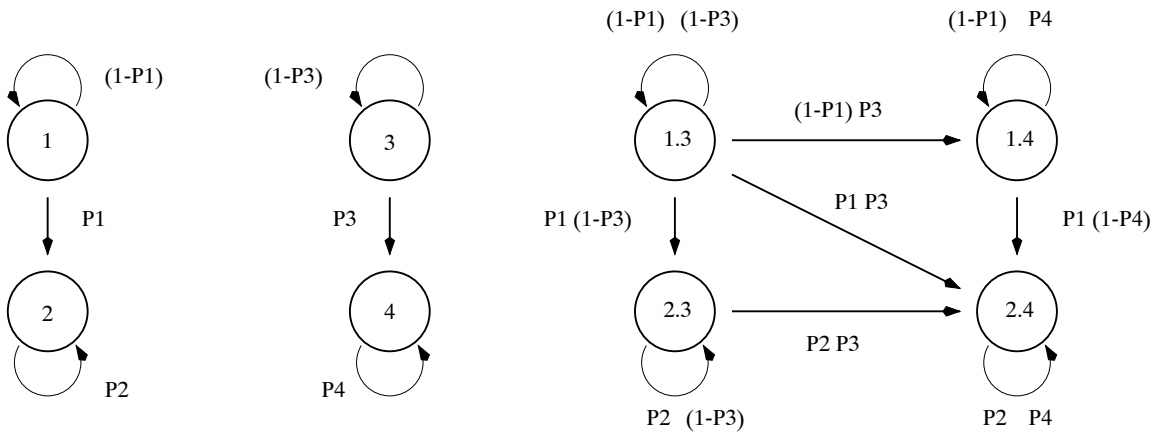

Abb. 8.1 Zusammenfassen von probabilistischen Transitionen

Gesucht ist ein FSS F***= ($\mathbb{S}^{***}, \mathbb{X}^{***}, \mathbb{Y}^{***}, \mathbf{P}^{***}$), das das Verhalten der beiden Ausgangssysteme vereinigt. Dabei ist die Vereinigung so zu verstehen, daß die Aufnahme der jeweils vom anderen Automaten ausgesendeten Symbole als Eingabe dient und infolgedessen Transitionen möglich sind. Das gemeinsame System wird CFSS genannt.

Es gibt Kombinationen von Transitionen, die *zusammengefaßt* werden können. Dies sind Kombinationen von Transitionen, die *gleichzeitig* stattfinden. Die Tatsache der Gleichzeitigkeit kann zwei Gründe haben. Einerseits kann eine Transitionen die andere *bedingen*. Dazu ist notwendig, daß mindestens eine der Transitionen bedingt ist und die andere Transition das dafür notwendige Symbol als Ausgabe produziert. Die Bedingung der bedingten Transitionen wird folglich durch die bedingende Transition bzw. deren Ausgabesymbol eliminiert. Es sei im folgenden davon ausgegangen, daß die Transitionen sich in unterschiedlichen FSS befinden. Es liegt in diesem Fall eine konkrete Kommunikation vor, da die Ausgabe der ersten Transitionen zum zweiten System geleitet wird und dort die Bedingung für die zweite Transition liefert. Der beschriebene Vorgang verläuft mit oben gemachten Voraussetzungen in infinitesimal kurzer Zeit. Die zweite Möglichkeit, Transitionen zusammenzufassen, ist dann gegeben, wenn sie aufgrund eintreffender, verschiedener Signale gleichzeitig stattfinden. Dies ist ein an einen gemeinsamen Takt gekoppelter Vorgang und tritt später nur als Sonderfall auf.

Zunächst soll der Fall von zwei probabilistischen Transitionen behandelt werden, die, weil beide an einen globalen Takt gekoppelt, gleichzeitig erfolgen. Es ist leicht einsehbar, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß des kombinierten Übergangs das Produkt aus den Einzelwahrscheinlichkeiten ist. In Bild **??** ist beispielhaft für je einen probabilistischen Übergang in den Ausgangssystemen das Zusammenfassen zu einem gemeinsamen System gezeigt. Die beiden Systeme mit je zwei Zuständen werden zu einem globalen System mit vier Zuständen zusammengefaßt.

Sei also τ^* eine Transition in F*und τ^{**} eine in F**und τ_i die Teilmenge aller Relationen der betrachteteten Systeme, die nur Relationen der Klasse i enthält. Dann gilt formal

Tabelle 1a

Transitionen		gemeinsame Transition		Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_3) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} \subseteq \tau_3$	mit $p^{***} = p^* \cdot p^{**}$	PA + PA = PA
$(\tau^* \subseteq \tau_3) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} \subseteq \tau_3$	mit $p^{***} = p^* \cdot p^{**}$	PA + P = PA
$(\tau^* \subseteq \tau_4) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} \subseteq \tau_3$	mit $p^{***} = p^* \cdot p^{**}$	P + PA = PA
$(\tau^* \subseteq \tau_4) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} \subseteq \tau_4$	mit $p^{***} = p^* \cdot p^{**}$	P + P = P.

Dabei bezeichnet die symbolische Kurzschreibweise in der Spalte *Kommentar* das Zusammentreffen der Transitionen der Ausgangssysteme bzw. deren Klassen und die jeweilige Ergebnisklasse. Es muß natürlich sichergestellt werden, daß die Ausgabe der gemeinsamen Transition beide möglicherweise generierten Ausgaben vereinigt. Also gilt

Tabelle 1b

Transitionen		gemeinsame Transitionen	Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_3) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), (y^*, y^{**}), (s'^*, s'^{**}), p^*p^{**})$	PA
$(\tau^* \subseteq \tau_3) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^*, (s'^*, s'^{**}), p^*p^{**})$	PA
$(\tau^* \subseteq \tau_4) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^{**}(s'^*, s'^{**}), p^*p^{**})$	PA
$(\tau^* \subseteq \tau_4) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s'^*, s'^{**}), p^*p^{**})$	P.

Es soll hier nur angemerkt werden, daß zeitdiskrete probabilistische Transitionen als auf einen gemeinsamen Takt synchronisierte Transitionen aufgefaßt werden. Offensichtlich können sie dann auch als bedingte probabilistische Transitionen beschrieben werden, falls die Bedingung durch das globale Taktsignal aufgelöst wird. Es lassen sich in zeitkontinuierlichen Systemen andere Verfahrensweisen denken, bei denen dann der globale Takt entfallen kann.

Nun können wir den oben beschriebenen Vorgang der aktuellen Kommunikation beschreiben. In Abb. **??** ist beispielhaft für einen bedingten und einen probabilistischen Übergang in den Ausgangssystemen das Zusammenfassen zu einem gemeinsamen System gezeigt.

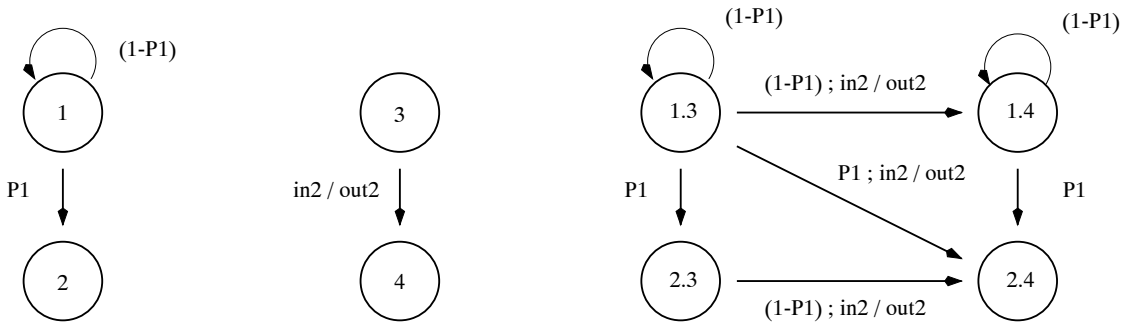

Abb. 8.2 Zusammenfassen einer probabilistischen und einer bedingten Transition

Falls die erste Transition nicht ausgabeunabhängig ist, d.h. ein Ausgabesymbol produziert, und die Bedingung der zweiten Transition genau dann erfüllt ist, wenn der zweite Automat ein Eingabe-Symbol erhält, das mit der Ausgabe der ersten Transition identisch ist, entfällt die Bedingung und die Ausgabe. Genau dann wird aktuell Kommunikation zweier Automaten realisiert. In der folgenden Tabelle ist formal dargestellt, wie probabilistische und bedingte Transitionen zusammengefaßt werden können. Wenn aktuell Kommunikation vorliegt, falls also gilt $y^{**} = x^*, x^* \in \mathrm{X}^*$, $y^{**} \in \mathrm{Y}^{**}$, folgt

Tabelle 2a1

Transitionen	gemeinsame Transition	Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_1) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\tau^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^*, (s'^*, s'^{**}), p^* p^{**})$	CPA + PA = PA.

Liegt keine aktuelle Kommunikation vor, d.h. es findet keine Elimination der Bedingung der bedingten Transition statt, dann werden die Transitionen der Ausgangssysteme unter Beachtung des Zustands im jeweils anderen System übernommen und es gilt

Tabelle 2a2

Transitionen		gemeinsame Transition	Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_1) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_1((s^*, s^{**}), x^*, y^*, (s'^*, s^{**}), p^*)$	CPA + PA
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^{**}, (s^*, s'^{**}), p^{**})$.	

In gleicher Weise lassen sich die Regeln für alle anderen Kombinationen von Transitionen in den Systemen F^* und F^{**} bezüglich der Transition des gemeinsamen Systems F^{***} formulieren, bei denen probabilistische Transitionen relevant sind:

Tabelle 2b

Transitionen		gemeinsame Transition	Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_1) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_1((s^*, s^{**}), x^*, y^*, (s'^*, s^{**}), p^*)$	CPA + P
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
$(\tau^* \subseteq \tau_2) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_2((s^*, s^{**}), x^*, (s'^*, s^{**}))$	CP + PA
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^{**}, (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
falls $y^{**} = x^*, x^* \in \mathrm{X}^*$, $y^{**} \in \mathrm{Y}^{**}$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s'^*, s'^{**}), p^* p^{**})$	od. P

Transitionen		gemeinsame Transition	Kommentar
$(\tau^* \subseteq \tau_2) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_2((s^*, s^{**}), x^*, (s'^*, s^{**}), p^*)$	CP + P
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
$(\tau^* \subseteq \tau_5) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_5((s^*, s^{**}), x^*, y^*, (s'^*, s^{**}))$	CA + PA
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^{**}, (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
falls $y^{**} = x^*, x^* \in \mathrm{X}^*$, $y^{**} \in \mathrm{Y}^{**}$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^*, (s'^*, s'^{**}), p^* p^{**})$	od. PA
$(\tau^* \subseteq \tau_5) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_5((s^*, s^{**}), x^*, y^*, (s'^*, s^{**}))$	CA + P
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
$(\tau^* \subseteq \tau_6) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_3)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_6((s^*, s^{**}), x^*, (s'^*, s^{**}))$	C + PA
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_3((s^*, s^{**}), y^{**}, (s^*, s'^{**}), p^{**})$	
falls $y^{**} = x^*, x^* \in \mathrm{X}^*$, $y^{**} \in \mathrm{Y}^{**}$	$\Longrightarrow$	$\tau^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s'^*, s'^{**}), p^* p^{**})$	od. P
$(\tau^* \subseteq \tau_6) \wedge (\tau^{**} \subseteq \tau_4)$	$\Longrightarrow$	$\tau_a^{***} = \tau_6((s^*, s^{**}), x^*, (s'^*, s^{**}))$	C + P
	$\Longrightarrow$	$\tau_b^{***} = \tau_4((s^*, s^{**}), (s^*, s'^{**}), p^{**})$.	

8.4 Anwendungen

In [?] und [?] finden sich Untersuchungen zu dem sich aus mehreren einzelnen Automaten ergebenen globalen Automaten, dessen graphische Darstellung auch *global transition graph* genannt wird. Dabei werden u.a. *dead lock - Freiheit* bzw. *Erreichbarkeit* des globalen Automaten untersucht.

Mit den bisher dargestellten Algorithmen lassen sich stochastische Eigenschaften des Übertragungsmediums als probabilistische Automaten mit in die Überlegungen und Algorithmen einbeziehen. Auf diese Weise ist eine Integration von stochastischen Medien, wie sie der Funkkanal darstellt, in die Protokollanalyse möglich.

Dies ist für kleine Zustandsräume ohne weitere Hilfsmittel, für größere Automaten jedoch nur maschinell möglich. Zur Verwaltung der Automaten wurde ein Werkzeug entwickelt, das in [?] beschrieben ist und auf dem oben beschriebenen Regelwerk beruht. Das Werkzeug weist die in Abb. ?? skizzierte Struktur auf. Zunächst werden die Automaten einzeln eingelesen und anschließend jeweils zwei Automaten zu einem gemeinsamen Automaten zusammengefaßt. Der entstehende *globale* Automat läßt keine Kommunikation mehr zu, da alle möglichen gemeinsamen Transitionen aufgelöst wurden. Nun können Grenzbetrachtungen angestellt werden.

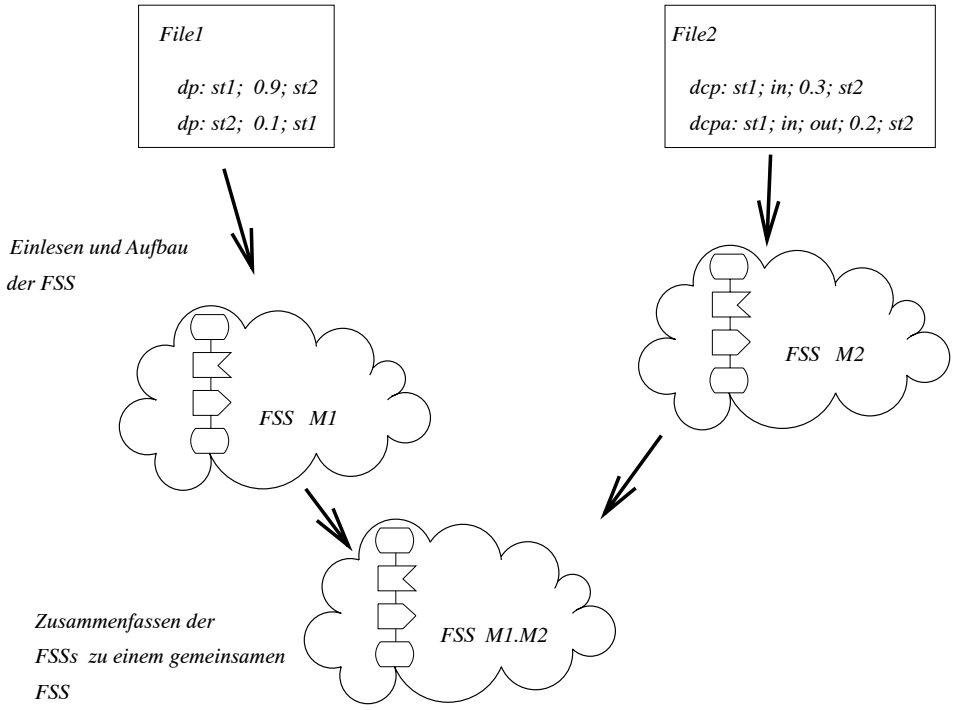

Abb. 8.3 Werkzeug zum Zusammenfassen von endlichen stochastischen Automaten

8.5 Grenzbetrachtungen

Analog zu den Markov-Prozessen lassen sich auch hier Grenzbetrachtungen anstellen, die den Verlauf des Prozesses für sehr große Zeiten beschreiben.

Ein stochastischer Automat nimmt einen Zustand s der Zustandsmenge $\mathbb{S}$ mit Wahrscheinlichkeit an. Der Zustand eines stochastischen Automaten zur Zeit t ist deshalb durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathfrak{z}(t)$ über $\mathbb{S}$ zu charakterisieren. $\mathfrak{z}(t)(s)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß der betrachtete Automat zur Zeit t den Zustand $s \in \mathbb{S}$ annimmt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathfrak{z}(t)$ über $\mathbb{S}$ heißt stochastischer Zustand des betrachteten Automaten zur Zeit t. An die Stelle des Zustandes der Zustandsmenge eines determinierten Automaten tritt also beim stochastischen Automaten der stochastische Zustand, eine Verteilung über der Zustandsmenge. Jeder stochastische Zustand $\mathfrak{z}$ läßt sich zur Zeit t als Abbildung

$$\mathfrak{z}(t) : \mathbb{S} \to [0,1] \quad \text{mit} \quad \sum_{s \in S} \mathfrak{z}(t)(s) = 1 \tag{8.5}$$

auffassen. Offensichtlich läßt sich auch jeder Zustand $s' \in S$ als determinierter Zustand $\mathfrak{z}$ mit

$$\mathfrak{z}(t)(s) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad s = s' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.6}$$

darstellen.

Existiert der Grenzwert $t \to \infty$ für $\mathfrak{z}(t)(s)$ über $\mathbb{S}$, so kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\mathfrak{z}_\infty(s) \;=\; \lim_{t \to \infty} \mathfrak{z}(t)(s) \tag{8.7}$$

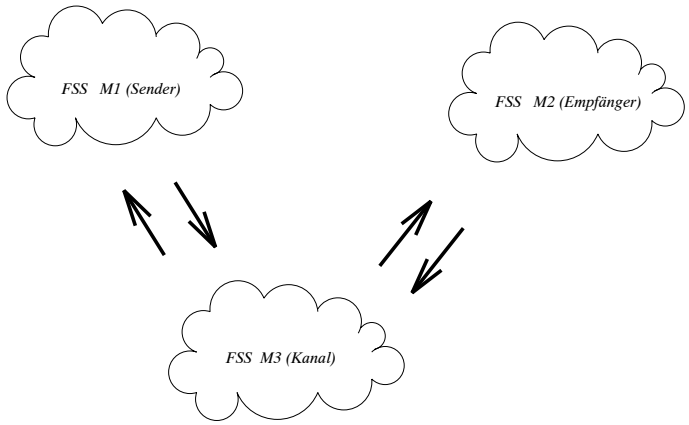

Abb. 8.4 Kommunikationsszenario

demgemäß als *stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung* betrachtet werden.

Auf diesen Überlegungen basiert die Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Markov-Ketten. Mit analogem mathematischen Vorgehen läßt sich auch bei stochastischen Automaten die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen.

Diese stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung läßt sich zur Leistungsanalyse von Kommunikationsprotokollen über stochastische Medien heranziehen.

Genauere Untersuchungen und insbesondere Anwendungen aus dem Bereich der Telekommunikationsprotokolle findet man in [**?**]. Dabei ist strukturell folgendes Kommunikationsszenario realisiert, vgl. Abb. **??**: Ein Sender kommuniziert mit einem Empfänger über ein gemeinsames stochastisches Medium, das eine bestimmte Verlustrate bezüglich der übertragenen Dateneinheiten aufweist. Alle drei stochastischen Automaten weisen mehrere Zustände auf. Die mathematische Analyse erfolgt durch Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeiten der rekurrenten Zustände. Mit der stochastischen Simulation wurden die Ergebnisse verifiziert, die bis auf Rechenungenauigkeiten von 10^{-10} übereinstimmen.

Zur Klärung der Zusammenhänge soll abschließend eine beispielhafte Anwendung der erläuterten systemtheoretischen Modellierung mit stochastischen Automaten folgen.

8.6 Durchsatz eines einfachen Quittierungsverfahrens

Der Funkkanal wurde durch Matrizen $\mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{64}$, je nach Anzahl der Zustände, beschrieben, vgl. Kap. **??**. Wird ein bestimmter Mittelwert gewählt, lassen sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten der Zustände bestimmen. Es ergeben sich die Diagonalmatrizen $\mathbf{\Phi}_2, ..., \mathbf{\Phi}_{64}$. Dann lassen sich über $\mathbf{\Delta} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}$ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für ungestörte Symbole bestimmen, vgl. Kap. **??** für einzelne Symbole und Kap. **??** für Paketfehlermodelle. Aus Gründen der Darstellbarkeit muß das folgende Beispiel jedoch in der Komplexität überschaubar sein, so daß einige Vereinfachungen vorgenommen werden. Der Kanal besteht aus vier Zuständen, $\mathbb{S}_c = \{C1, C2, C3, C4\}$, s. Abb. **??**, wobei die zurückliegenden Kapitel gezeigt haben, daß dies die minimal empfehlenswerte Zustandszahl ist.

In Kap. ?? wurde der Zusammenhang der Paket- und Symbolfehlermodelle erläutert. Mit den Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{v}}$ läßt sich das in Kap. ?? erläuterte System von Matrizen, das die Wahrscheinlichkeitsaspekte des stochastischen Automaten erfaßt, parametrisieren. *Data* symbolisiert das Datenpaket, das vom Sender an den Kanal geschickt wird, *Data*0 (fehlerfreies Datanpaket) bzw. *Data*1 (fehlerbehaftetes Datanpaket) werden vom Kanal an den Empfänger gesendet. Dann gilt, vgl. Kap. ??,

$$\begin{aligned}
Pr\{C1, Data0 \,|\, C1, Data\} &= \tilde{w}_{11} \qquad Pr\{C2, Data0 \,|\, C1, Data\} = \tilde{w}_{12} \\
Pr\{C3, Data0 \,|\, C1, Data\} &= \tilde{w}_{13} \qquad Pr\{C4, Data0 \,|\, C1, Data\} = \tilde{w}_{14} \\
\\
Pr\{C1, Data1 \,|\, C1, Data\} &= \tilde{v}_{11} \qquad Pr\{C2, Data1 \,|\, C1, Data\} = \tilde{v}_{12} \\
Pr\{C3, Data1 \,|\, C1, Data\} &= \tilde{v}_{13} \qquad Pr\{C4, Data1 \,|\, C1, Data\} = \tilde{v}_{14} \\
\\
Pr\{C1, Data1 \,|\, C2, Data\} &= \tilde{v}_{21} \qquad Pr\{C2, Data1 \,|\, C2, Data\} = \tilde{v}_{22} \\
Pr\{C3, Data1 \,|\, C2, Data\} &= \tilde{v}_{23} \qquad Pr\{C4, Data1 \,|\, C2, Data\} = \tilde{v}_{24}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

etc....

Offensichtlich kann dieses Paketfehlermodell auch als DMAP mit zwei Ausgabeklassen interpretiert werden.

Die Eingabe- und Ausgabemengen des Kanals enthalten die Symbole für die evtl. fehlerbehafteten Datenpakete,

$$\mathbb{X}_c = \{Data\}, \qquad \mathbb{Y}_c = \{Data0, Data1\}. \tag{8.9}$$

Der Sender enthalte zwei Zustände, $\mathbb{S}_e = \{1, 2\}$. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 wird ein Datenpaket generiert und als *Data*-Symbol an den Kanal gesendet. Erhält der Sender eine negative Quittung *Nack*, wechselt er in den Zustand 2 und sendet im nächsten Zeittakt mit Wahrscheinlichkeit 1 das Datenpaket erneut[3], s. Abb. ??. Danach kehrt der Sender wieder in den Zustand 1 zurück.

$$\mathbb{X}_s = \{Nack\}, \qquad \mathbb{Y}_s = \{Data\} \tag{8.10}$$

Zunächst enthalte der Empfänger zwei Zustände $\mathbb{S}_e = \{3, 4\}$. Auf ein fehlerhaftes Datenpaket *Data*1 reagiert der Empfänger mit einer negativen Quittung *Nack* und wechselt in den Zustand 4, den er erst dann verläßt, wenn er ein fehlerfreies Datenpaket *Data*0 erhält, s. Abb. ??. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Zustand 4 ist also ein Maß für die fehlerhafte Übertragung. Für Ein- und Ausgabemenge gilt

$$\mathbb{X}_e = \{Data0, Data1\}, \ \mathbb{Y}_e = \{Nack\}. \tag{8.11}$$

[3]Hier wird deutlich, daß die probabilistischen Transitionen den Zeitvorschub realisieren, also als an einen Takt gekoppelte Transitionen interpretiert werden können.

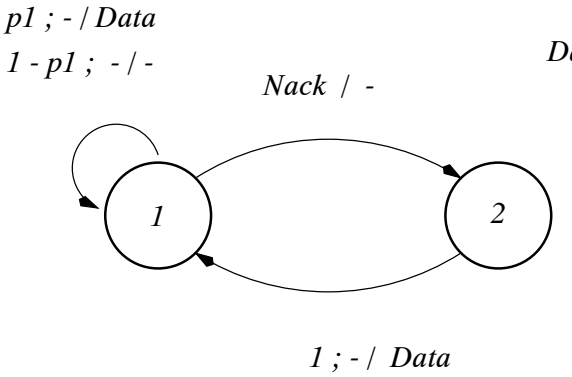

Abb. 8.5 Sender

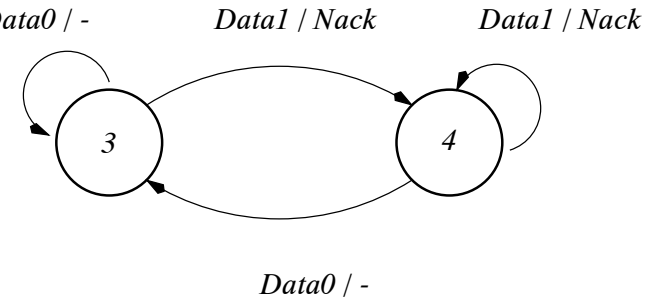

Abb. 8.6 Empfänger

Offensichtlich wird angenommen, daß der Quittierungskanal ungestört ist. p_1 wird mit 0.1 gewählt, die Paketfehler wurden mit $\mathbf{\Phi} = \mathbf{diag}(0.172, 1.1e{-}3, 1.31e{-}7, 2.5063e{-}13)$ angenommen. $\mathbf{q}$ wurde analog Kap. **??** mit m=4 gewählt.

Nach den vorgestellten prädikatenlogischen Algorithmen werden die einzelnen stochastischen Automaten zusammengefaßt. Im abgeschlossenen globalen Automaten existieren 84 Transitionen der Klasse 6 und 4 Transitionen der Klasse 5; deshalb kann die Liste der Transitionen hier nicht dargestellt werden. Die Zustandsmenge des globalen Automaten enthält die Kreuzprodukte der Zustandsmengen der Einzelautomaten, also 16 Zustände. Es sei die Notation $C1.1.3$ verwendet, die besagt, daß der Kanal sich im Zustand $C1$, der Sender im Zustand 1 und der Empfänger im Zustand 3 befinden. Dabei können einige Zustandskombinationen transienten Charakter haben, z.B. die Zustände $*.2.3$, da unmittelbar nach Eintritt des Senders in Zustand 2 der Empfänger schon in Zustand 4 wechselt. Analoges gilt für $*.1.4$. Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten sind deshalb auch identisch Null. Im folgenden sind die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten aufgelistet:

Zustand s	stationäre Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{z}_\infty(\cdot)$
$C1.1.3$	0.113118
$C1.1.4$	0
$C1.2.3$	0
$C1.2.4$	0.00205908
$C2.1.3$	0.450469
$C2.1.4$	0
$C2.2.3$	0
$C2.2.4$	0.000286956
$C3.1.3$	0.31813
$C3.1.4$	0
$C3.2.3$	0
$C3.2.4$	$4.33115e-06$
$C4.1.3$	0.115932
$C4.1.4$	0
$C4.2.3$	0
$C4.2.4$	0

Zustands-kombination	stationäre Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{z}_\infty(\cdot)$
$C1.*.*$	0.115177
$C2.*.*$	0.450756
$C3.*.*$	0.318113
$C4.*.*$	0.115932
$*.1.3$	0.997650
$*.2.4$	$2.35028e{-}3$

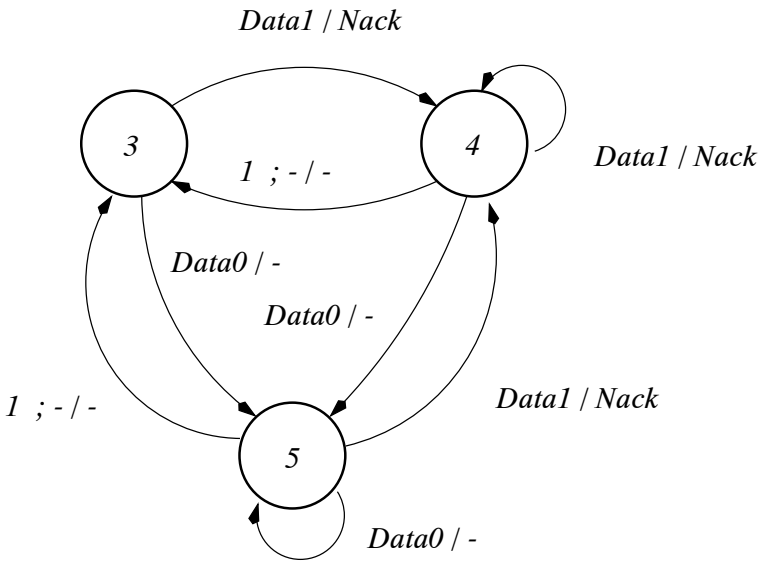

Abb. 8.7 Modifizierter Empfänger

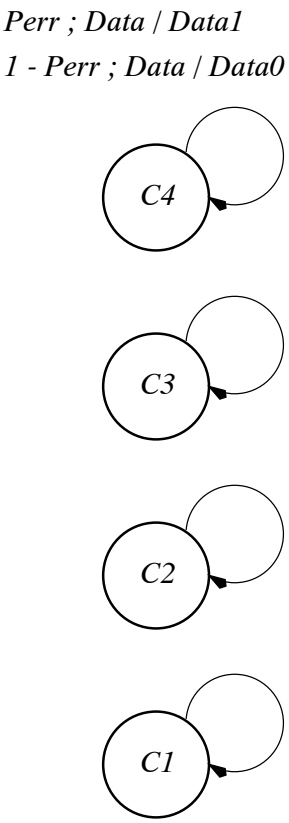

Abb. 8.8 Kanal mit $m = 4$

Dabei symbolisiert $*$ die Summation über alle Zustände an der ensprechenden Position.

Es soll noch angemerkt werden, daß in Abb. **??** die Transitionen gemäß **q** nicht eingezeichnet sind, sondern lediglich die nach Maßgabe von **v** und **w**, die jeweils in den gleichen Zustand überführen.

Bei dem Empfänger ist jedoch Zustand 3 kein direktes Maß für den fehlerfreien Empfang, da auch bei unterbliebenem Datenaustausch (man beachte, daß der Sender nur mit Wahrscheinlichkeit p_1 sendet) der Empfänger diesen Zustand einnimmt. So ist auch das Verhältnis der stationären Zustandswahrscheinlichkeit der Zustände 3 und 4 kein direktes Maß für die Übertragungsqualität. Um dies zu erhalten, wird ein weiterer Zustand eingefügt. Abb. **??** zeigt den modifizierten Empfänger. Nun gilt $\mathbb{S}_e = \{3, 4, 5\}$. Zustand 5 repräsentiert den fehlerfreien Empfang, Zustand 4 den fehlerbehafteten.

Die jeweiligen Verhältnisse der stationären Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{z}_\infty(C1.2.4)/\mathfrak{z}_\infty(C1.1.5)$ für $C1$, bzw. $C2, C3, C4$ entsprechen der Anzahl der fehlerfreien Datenpakete bezogen auf die fehlerbehafteten. Dann gilt für den auf den Kanalzustand C1 bedingten Durchsatz, der die fehlerfreien Datenpakete bezogen auf die gesamte Anzahl der Datenpakete beschreibt,

$$\mathbf{E}\,[\,D\,|\,\text{Kanal ist in Zustand C1}\,] \;=\; \frac{1}{1 \,+\, \mathfrak{z}_\infty(C1.2.4)/\mathfrak{z}_\infty(C1.1.5)}. \qquad (8.12)$$

Die von Null verschiedenen stationären Zustandswahrscheinlichkeiten sind

Zustand s	stationäre Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{z}_\infty(\cdot)$
$C1.1.3$	0.101807
$C1.1.5$	0.011310
$C1.2.4$	0.002060
$C2.1.3$	0.405411
$C2.1.5$	0.045058
$C2.2.4$	0.000287
$C3.1.3$	0.286328
$C3.1.5$	0.031802
$C3.2.4$	$4.3311e{-6}$
$C4.1.3$	0.104344
$C4.1.5$	0.011592
$C4.2.4$	$1.563e{-20}$

auf den Kanalzustand bedingter Durchsatz

$$
\begin{aligned}
C1: &\quad \mathbf{E}\,[\,D\,|\,\text{Kanal ist im Zustand C1}\,] &= 0.8459\\
C2: &\quad \mathbf{E}\,[\,D\,|\,\text{Kanal ist im Zustand C2}\,] &= 0.9934\\
C3: &\quad \mathbf{E}\,[\,D\,|\,\text{Kanal ist im Zustand C3}\,] &= 0.9998\\
C4: &\quad \mathbf{E}\,[\,D\,|\,\text{Kanal ist im Zustand C4}\,] &= 1.0000
\end{aligned}
$$

Offensichtlich geht der Durchsatz gegen Eins, je besser der Kanal ist, d.h je größer die Zustandsindizes $C2, C3, C4$ des Kanals sind.

8.7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem erläuterten Beispiel wurde gezeigt, wie Kommunikationsprotokolle unter Einschluß der stochastischen Charakteristik des Funkkanals modelliert werden können. Dabei muß, wie dargestellt, das Protokoll als (stochastischer) endlicher Automat beschrieben werden. Die i.a. zur Modellierung von Kommunikationsprotokollen verwendeten erweiterten endlichen Automaten müssen in endliche Automaten umgewandelt werden, indem der Definitionsbereich der Variablen zusätzlich in den Zustandsraum abgebildet wird.

Eine weitere Einschränkung stellt die maximale Anzahl der Zustände, bzw. Transitionen dar, die vom Rechner verarbeitet werden können. Sie ist von der Speichergröße der verwendeten Rechner abhängig und liegt in der Größenordnung von 10^4 bis 10^6 Transitionen.

Die genannten Einschränkungen wirken sich jedoch erst bei komplexen Protokollen aus, vgl. [**?**].

Die vorgestellte Methodik wird gegenwärtig an in der Praxis verwendeten Protokollen getestet und die Implementierung des prädikatenlogischen Regelwerkes optimiert. Insbesondere ist eine Implementierung in PROLOG, einer logikbasierten deklarativen Programmiersprache, die bei Anwendungen der künstlichen Intelligenz Verwendung findet, in Untersuchung. Dabei zeigt sich, daß adressenorientierte Kommunikationsstrukturen[4] das Regelwerk vereinfachen.

[4]Man beachte, daß in der vorgestellten Kommunikation der stochastischen Automaten keine dedizierten Kommunikationswege existieren, sondern alle Automaten im *Rundruf*-Verfahren alle anderen erreichen können.

Außerdem ist eine Erweiterung des Regelwerkes für die Verschmelzung von *erweiterten* endlichen stochastischen Automaten in Vorbereitung. Dabei erhält jeder stochastische Automat einen Variablenraum, während der Variablenraum des globalen Automaten durch das Kreuzprodukt der Variablenräume der Teilautomaten gebildet wird.

Abkürzungsverzeichnis

Allgemeine mathematische Abkürzungen

$\wedge$	logisches ODER
$\vee$	logisches UND
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\cap$	Schnittmenge
$\times$	Kreuzprodukt zweier Mengen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich Null
$\{\cdot\}$	Menge
$(\cdot)$	Folge, Vektor
$()_{i,j}$	Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix
$(a_{i,j\in\mathbb{E}})$	Matrix aus den Elementen $a_{i,j}$ mit $i,j \in \mathbb{E}$
$()^{-1}$	inverse Matrix
$\{\cdot,\cdot\}$	stochastsicher Prozeß mit Zufallsvariable und Indexvariable
$\mathbf{E}\,[\,\cdot\,]$	Erwartungswert der Zufallsvariable
f_c	Trägerfrequenz
$\square$	Ende eines Satzes od. Beweises

Bezeichnungen der Matrizen

$\mathbf{q}$	Übergangsmatrix des Markov-Prozesses
$\mathbf{q}(k)$	Übergangsmatrix des semi-Markov-Prozesses
$\mathbf{Q}$	Infinitesimal-Generator des zeitkontinuierlichen Markov-Prozesses beim MMPP
$\mathbf{\Lambda}$	Intensitäten der Erneuerungen/Ankünfte/Fehler beim MMPP
$\mathbf{\Phi}$	Diagonal-Matrix mit den Fehlerwahrscheinlichkeiten beim MMBP
$\mathbf{\Delta}$	Diagonal-Matrix mit den Komplementen der Fehlerwahrscheinlichkeiten beim MMBP
$\mathbf{w}$	Matrix-Produkt aus $\mathbf{\Delta}$ und $\mathbf{q}$
$\mathbf{v}$	Matrix-Produkt aus $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{q}$

Bezeichnungen für die Prozesse

$\{U_t, t \in \mathbb{N}_0\}$	binärer Kanalprozeß des einfachen Gilbert-Elliott-Modelles
$\{e_n, n \in \mathbb{N}_0\}$	binärer Fehlerprozeß, vom Kanalprozeß abgeleiteter Prozeß
$\{A(t), t \in \mathbb{N}_0\}$	Einhüllende des Basisbandsignals, Musterprozeß
$\{J(t), t \in \mathbb{N}_0\}$	Zustandsprozeß über $\mathbb{E}$, mit dem der Kanalprozeß nachgebildet wird
$\{\tilde{J}(t), t \in \mathbb{N}_0\}$	Zustandsprozeß über $\tilde{\mathbb{E}}$, mit dem der Kanalprozeß nachgebildet wird
$\{(S_n, T_n), n \in \mathbb{N}_0\}$	Markov-Erneuerung-Prozeß
$\{Y(t), t \in \mathbb{N}_0\}$	semi-markov-Prozeß, mit dem der Kanalprozeß nachgebildet wird

Grundlegendes zur Matrizenrechnung

Eine gute systematische Zusammenfassung über die Matrizentheorie findet sich in dem ersten Kapitel von [?]. Einige wichtige Ergebnisse sollen hier aufgeführt werden. In [?] ist insbesondere das Kapitel über stochastische Matrizen erwähnenswert. Der Anhang von [?] bietet eine gute Zusammenfassung.

Definition
Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix. Existiert eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{E}$, so heißt $\mathbf{A}$ regulär und $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ die *inverse* Matrix von $\mathbf{A}$.

(B.1)

Satz 0:
Ist $\mathbf{A}$ regulär, dann gilt:
1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. Mit $\mathbf{A}$ ist auch $\mathbf{A}^T$ regulär.
3. $\mathbf{A}$ hat n linear unabhängige Zeilen- und Spaltenvektoren.

(B.2)

Satz 1:
Der Vektor $\underline{x}$ ist Eigenvektor (EV) der Martix $\mathbf{A}$, wenn gilt

$$\mathbf{A}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x}. \tag{B.3}$$

Der Wert λ wird als Eigenwert (EW) von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

(B.4)

Satz 2:
Zu verschiedenen EWen gehörige EVn sind linear unabhängig.

(B.5)

Satz 3:
Sind die zu einem EW gehörigen EVn linear unabhängig, so sind alle EVn linear unabhängig. Dann wird die Matrix $\mathbf{U}$, bestehend aus den EVn, als *vollständiges System* bezeichnet und es gilt $\det \mathbf{U} \neq 0$.

(B.6)

Satz 4:
Besitzt $\mathbf{A}$ n linear unabhängige Eigenvektoren, wobei n die Ordnung von $\mathbf{A}$ bezeichnet, so besitzt $\mathbf{A}$ eine *einfache Struktur* . Werden mit $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ die je verschiedenen EWe der Matrix $\mathbf{A}$

bezeichnet, und mit m_i die Vielfachheit der zu dem i-ten EW gehörigen EV, so sind sämtliche EVn von $\mathbf{A}$ linear unabhängig und es gilt

$$d_j = m_j, \tag{B.7}$$

wobei d_j den Defekt, d.h. die Differenz von Ordnung und Rang der Matrix $\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}$ bezeichnet.

Es folgt dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{U}^{-1} \tag{B.8}$$

mit $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}\ (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$.

(B.9)

Satz 5:
Reelle Matrizen besitzen nur reelle EWe und alle EVn sind linear unabhängig, [**?**], p. 24.

(B.10)

Satz 6:
Sind alle Elemente einer irreduziblen Matrix positiv, so besitzt diese Matrix nur einen einzigen positiven EW, der alle anderen EWe dem Betrage nach übersteigt. Zu diesem maximalen EW gehört ein EV mit positiven Koordinaten, Satz von Perron, [**?**], p. 96, [**?**] p. 166, [**?**], p. 46 für irreduzible, p. 58 für reduzible Matrizen in abgeschwächter Form.

Der maximale EW liegt zwischen der größten und der kleinsten Zeilensumme.

(B.11)

Satz 7:
Ist $\mathbf{A}$ eine stochastische Matrix, so sind alle Zeilensummen identisch Eins und der maximale EW ist ebenfalls Eins.

(B.12)

Satz 8:
Da alle anderen EW dem Betrage nach kleiner als der maximale EW sind, liegen sie folglich im Einheitskreis.

(B.13)

Satz 9:
Ist $\mathbf{A}$ eine Jakobi-Matrix, so sind alle EW reell, [**?**] p. 77-80.

(B.14)

Satz 10:
Besitzt $\mathbf{A}$ ausschließlich positive Hauptunterdeterminanten, gilt also

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0, \tag{B.15}$$

dann und nur dann sind alle EWe positiv, [?] p. 40-41. $\mathbf{A}$ wird dann auch *positiv definit* genannt.

(B.16)

Satz 11:
Besitzt $\mathbf{A}$ ausschließlich nicht negative Hauptunterdeterminanten, dann und nur dann sind alle EW nichtnegativ, [?] p. 40-41. $\mathbf{A}$ wird dann auch *positiv semi definit* genannt.

(B.17)

Satz 12:
Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}^{\,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{A}^{\,1} - \mathbf{A}^{\,n+1}\right). \tag{B.18}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$$n = 1: \qquad \sum_{k=1}^{1} \mathbf{A}^{\,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{A}^{\,1} - \mathbf{A}^{\,2}\right) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$n \to n+1: \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{A}^{\,k} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}^{\,k} + \mathbf{A}^{\,n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{A}^{\,1} - \mathbf{A}^{\,n+1}\right) + (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{\,n+1}$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\,n+1}\right) + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{\,n+1}\right) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{A}^{1} - \mathbf{A}^{\,n+2}\right).$$

(B.19)

Nachwort und Danksagung

Mobilität überwindet Grenzen, insbesondere die der Provinz. Diese Arbeit entstand, nachdem mein Fortbewegungsmittel ein Opfer der Flammen wurde und dadurch mein Aktionsradius beträchtlich reduziert wurde.

Die vorhergehenden Darstellungen zeigen, wie der Mangel an physischer Mobilität kompensiert werden kann: durch mobile Kommunikation. Dabei ist das Problem nicht einfach durch die Anschaffung eines Handys aus der Welt geschafft. Jede Technik hat ihre Tücken. Jedoch lassen die vielfältigen technischen Probleme nicht nur immer wieder Dienstreisen möglich werden, sondern sie geben auch Raum einer dezidierten wissenschaftlichen Profilierung.

Dabei ist Kreativität nicht erzwingbar. Gute Freunde können der Intuition nachhelfen. Da ist zunächst Peter Decker zu danken, mit dem im gemeinsamen Chaos wunderbar zu diskutieren ist.

Nicht unerwähnt sollen die Mitarbeiter unseres Lehrstuhls für Kommunikationsnetze bleiben: Ich bedanke mich bei allen für Rat und Tat. Martin Ostermann, mein bester HiWi, Studienarbeiter und Diplomand trug zu dieser Arbeit konstruktive Kritik bei.

Das Cafe Egmonts am Aachener Rathaus kann auch der Kreativität auf die Sprünge helfen. Das Trödel-Cafe im nahegelegenen Vaals ist dagegen eher etwas für den Abend.

Dann geht auch noch herzlicher Dank an Prof. Dr.-Ing. B. Walke, der mir sehr viele Freiheiten ließ, die ich zum Literaturstudium und Experimentieren nutzten konnte. Prof. Dr.-Ing. L. Kittel übernahm freundlicherweise das Korreferat.

Intuition ist nicht machbar, Inspiration nicht erzwingbar, sie kommt oder sie leibt aus. Deshalb steht ebenso Dank an den Urgrund allen Seins und aller Kreativität.

Ich hoffe, daß diese Arbeit dem Frieden dient.

Aachen, im Oktober 1995

Lebenslauf

Name:	Herbert Steffan,
EMail:	hst@comnets.rwth-aachen.de
Geburtsdatum:	24.10.64
Eltern:	Helmut und Inge Steffan
Schulausbildung:	
1971-1975	Grundschule in Gelsenkirchen Erle
1975-1981	Theodor-Heuss-Realschule in Gelsenkirchen
1981-1984	Gymnasium am Rathausplatz in Gelsenkirchen
Abitur:	Juni 1984
Studium:	
1984-1989	Elektrotechnik, Ruhr-Universität Bochum
	Vertiefungsrichtung: Nachrichtentechnik
	Diplomarbeit am Lehrstuhl für Meßtechnik, Prof. Dr.-Ing. G. Klein
Aufbaustudium:	
1.8.89 - 31.3.90	Informatik, Ruhr-Universität Bochum
Promotionsstudium:	
1.6.90 - 31.12.90	FernUniversität Hagen, Abteilung Datenfernverarbeitung,
	Prof. Dr.-Ing. B. Walke
seit 1.1.91	Rwth-Aachen, Lehrstuhl für Kommunikationsnetze,
	Prof. Dr.-Ing. B. Walke

Eine kurze Zusammenfassung für Freunde und Kollegen,

etwas salopper als der Rest!!

Das von Prof. Kittel vorgestellte Zustandsmodell für den Funkkanal wurde entscheidend verbessert, die Fehlerabstandsverteilungen werden nun (mit zykl. semi-Markov-Modellen) besser nachgebildet. Dabei wird zunächst versucht mit dem Zustandsprozeß das Spektrum des Musterprozesses nachzubilden. Man beachte, daß nun, im Gegensatz zu den Gilbert-Elliot-Modellen, erstmalig überhaupt der eigentliche zeitvariante Kanal erfaßt wird und der Fehlerprozeß als dem Kanalprozeß überlagerter Prozeß aufgefaßt werden kann.

Wenn dann erst das Spektrum von den Zustandsmodellen gut nachgebildet wird, kann auch die Fehlerabstandsverteilung exzellent angenähert werden. Korrekterweise sollte man aber zugeben, daß der Einfluß des Spektrums auf die Fehlerabstandsverteilung nur bei großen Fehlerabständen deutlich erkennbar ist.

Bei diesen Untersuchungen zeigte es sich, daß der sich bei dem Kittel-Modell einstellende Fehlerprozeß equivalent zu der zeitdiskreten Form des Markov-Modulierten-Poisson-Prozeß ist, der als Ankunftprozeß in der Verkehrstheorie verbreitet ist. Die Eigenschaften können also modifiziert übernommen werden. Dazu muß der semi-Markov-Kern $\mathbf{f}(x) = \mathbf{w}^{k-1}\mathbf{v}^1$ abgeleitet werden, der interessanterweise formal gleich dem des DMAP ist, den u.a. Ch. Hermann als korrelierten Ankunftprozeß verwendet. Von daher liegt es nahe, das (verbesserte) Kittel-Modell und den Markov-Modulierten-Binomial-Prozeß als DMAP aufzufassen, was aber zunächst keinen Erkenntnisgewinn zur Folge hat. Erst die dann naheliegende Interpretation des "alten" Gilbert-Elliot-Modelles als DMAP macht deutlich, daß nun alle Modelle eine ähnliche Struktur aufweisen und einheitlich beschrieben werden können. Insbesondere die auf den semi-Markov-Kern basierenden Eigenschaften gelten dann für alle Modelle.

[1] Achtung, dies hier sind Matrizen und Algebra mit Matrizen bzw. Matrixfunktionen ist i.a. nicht kom-

Besonders interessant sind die Eigenschaften, die sich als Paketfehlermodelle verwenden lassen: Die Wahrscheinlichkeit, daß k Fehler in n Symbolen auftreten und die Wahrscheinlichkeit, daß k Fehler hintereinander auftreten.

Nun gibt es ein Problem: die Zählfunktion, [2] die die Wahrscheinlichkeit, daß k Fehler in n Symbolen auftreten beschreibt, läßt sich bei den zeitdiskreten Prozessen nicht geschlossen darstellen, es existieren nur Rekursionsgleichungen, so daß hier eine Approximation vorgenommen wurde: Bei den Kittel-Modellen ist der Prozeß relativ langsam, so daß sich jeweils in den Zuständen ein normaler Binomial-Prozeß ergibt, der manchmal seine Parameter ändert, aber selten; denn wie wir wissen, ändert sich der Funkkanal über die Länge eines Paketes nur wenig. Und diese Approximation geht natürlich für das einfache Gilbert-Modell nicht.

Dieser Vorteil der (verbesserten) Kittel-Modelle stand natürlich nicht ursprünglich im Vordergrund, sondern die Verwendung für Simulationssysteme: Die (verbesserten) Kittel-Modelle diskretisieren den Fading-Prozeß und sind unabhängig von einem einzustellenden Mittelwert, denn dieser wird einfach aufmultipliziert. Deshalb müssen diese Modelle bei Parameteränderungen in stochastischen Simulationen nicht vollst. neu parametrisiert werden. Es muß nur die Abbildung der Zustände auf die Bitfehlerrate neu bestimmt werden, weil der Rayleigh-Prozeß als normierter Prozeß sich selbst nicht ändert. Das wurde in Kap. 5: GOOSE2++ genutzt, das erste Simulationssystem weltweit, das mehrere Fahrzeuge in der Landschaft 'rumfahren läßt und dennoch nicht auf zeit- und frequenzselektive Modelle[3] für den Funkkanal verzichtet. Herr Decker steuerte dankenswerterweise die Fehlersicherung[4] bei, und Herrn Junius versucht gerade auf GOOSE zu promovieren.

Dann wurde noch der Empfänger gebaut, der die Ausweitung der Zustandsmodelle auch auf Mehrpfad-Modelle erlaubt. Dazu muß bekanntermaßen auch ein Entzerrer gebaut werden, den Herr Fleige dann gleich adaptiv, nach dem (fast) neusten Stand der Wissenschaft, entwickelt hat.

Daß dem engagierten Forscher, der lange SDL und Automaten betreut hat, dann auffällt, daß alle stochastischen Prozesse eigentlich nur besondere Automaten sind, nämlich stochastische, liegt fast im Lauf der Geschichte. Alles besteht aus Zuständen und Übergängen, nur die Bedingungen für diese Übergänge sind unterschiedlich. In diesem Zusammenhang ist das letzte Kap. entstanden, das die Funkkanäle formal in die Theorie der Automaten integriert. So können Funkkanäle, beschrieben durch eines der entwickelten Paketfehlermodelle in die Untersuchung von Protokollen mit berücksichtigt werden. Dies ist natürlich nur für kleine Automaten mit Papier und Bleistift möglich, für große wurde ein Tool entwickelt, das Herr Ostermann jetzt noch weiterentwickelt. Insbesondere für die Anwendung interessante Protokolle mit 10 bis 20 Zuständen, wie z.B. das RLP, werden zu Testzwecken untersucht.

---

[2] Beim Binomial-Prozeß

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

beim Poisson-Prozeß die Poissonformel, also die Wkeit, daß k Ankünfte/Fehler/Erneuerungen in n.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.

In dieser Arbeit wird sowohl eine erneuerungstheoretische wie auch eine automatentheoretische Neuinterpretation von Zustandsmodellen für den Funkkanal vorgenommen. Neben den bekannten Gilbert-Elliot-Modellen werden zwei weitere Zustandsmodelle vorgestellt. Sie basieren auf der Diskretisierung des den Funkkanal beschreibenden stochastischen Prozesses. Zunächst werden nicht frequenzselektive Kanäle modelliert, indem bestimmten Pegelbereichen des über den Funkkanal übertragenen Signals Symbolfehlerraten zugeordnet werden. Dann werden mehrere Ausbreitungspfade für den Kanal realisiert. Die entsprechend notwendige Kanalschätzung und Entzerrung wird im Empfängermodell vorgenommen und so die sich ergebene Symbolfehlerrate für alle Zustände des nun mehrpfadigen Kanalmodells ermittelt. Durch die Interpretation des sich einstellenden Fehlerprozesses als *Erneuerungsprozeß* lassen sich wichtige Eigenschaften ableiten, die bisher nicht bekannt waren. Neben dieser erneuerungstheoretischen Interpretation läßt sich eine automatentheoretische Interpretation vornehmen, die die Fehlerprozesse als Ausgabe von *stochastischen Automaten* betrachtet. Dies mündet in systemtheoretische Überlegungen, mit denen alle Module eines digitalen Kommunikationssystems einheitlich beschrieben werden können.