Ein Rechnermodell mit statischen Prioritäten und Zeitscheiben

A static-priority queue with time slicing

Elektron. Rechenanl. 22 (1980), H. 3, S. 107–114
Manuskripteingang: 14. November 1979

von B. WALKE
AEG-TELEFUNKEN, Forschungsinstitut Ulm

Es wird ein Modell vom Typ M/G/1 (mit einem Prozessor, beliebiger Bediendauerverteilung der Anforderungen und Poisson Ankunftsprozess) berechnet. Anforderungen mit der statischen Priorität i ($1 \leq i \leq N$) haben individuelle Ankunftsraten und Bediendauerverteilungen und dürften in einem unbegrenzten Wartepuffer warten. Neben der bekannten Abfertigungsstrategie first come first serve (FCFS) wird für Anforderungen gleicher Priorität ein Zeitscheibenverfahren eingeführt, das in Abhängigkeit der schon verbrauchten Bediendauer unterschiedlich lange Zeitscheiben verwendet. Die mittlere Wartezeit wird dabei u.U. gegenüber der Strategie FCFS deutlich verkleinert.

Die mittlere Wartezeit von Anforderungen jeder Priorität und die von der Bediendauer abhängige mittlere Wartezeit werden berechnet. Beispiele erläutern die gewonnenen Ergebnisse.

An infinite queue single-server model M/G/1 with N external preemptive-resume priorities is analysed. Customers with priority i ($1 \leq i \leq N$) arrive according to a Poisson process with intensity λ_i, join the i^{th} priority level and demand service according to a general distribution function. In each priority level the service discipline may be either FCFS or MLFCS (multi-level FCFS). In the MLFCFS discipline service requests are assigned to different sublevels within a priority level, dependent on the amount of attained service. Between such sublevels the feedback discipline FB_∞ is applied.

We compute the mean waiting time of customers with priority number i, both with and without condition on their service requirement. Examples are discussed for which the mean waiting time is plotted.

1 Einleitung

Für Realzeitrechner stellt sich die Aufgabe, Anforderungen abhängig von ihrer Wichtigkeit unterschiedlich schnell zu bedienen, so daß wichtige Anforderungen möglichst kurz, unwichtigere dafür länger warten müssen. Jede Anforderung ist durch ihren Ankunftszeitpunkt in einer Warteschlange vor dem Prozessor und ihre Bediendauer beschreibbar. Wir betrachten hier den Fall, daß Anforderungen zu nicht vorausbekannten Zeitpunkten ankommen, und daß ihre Bediendauern einer gegebenen Verteilungsfunktion entstammen, also nicht exakt bekannt sind. Anforderungen unterschiedlicher Wichtigkeit sollen individuelle Ankunftsprozesse (d.h. Gesetzmäßigkeiten für den Abstand zwischen Ankünften) und individuelle Bediendauerverteilungen haben können, sowie unterschiedliche statische unterbrechende Prioritäten haben.

Beispielsweise können sehr wichtige Anforderungen eine hohe Ankunftsrate und im Mittel kurze Bediendauern haben, während unwichtigere Anforderungen seltener auftreten und im Mittel länger rechnen.

Bei Prozeßrechnern werden Anforderungen gleicher Wichtigkeit (d.h. Priorität) üblicherweise in der Reihenfolge des Eintreffens (Strategie FCFS, first come first serve) abgearbeitet. Unter dieser Voraussetzung kann die mittlere Wartezeit und deren Streuung für Anforderungen jeder Priorität berechnet werden.

Es ist nun bekannt [7; 8], daß Anforderungen mit stark streuender (= stärker streuend als eine negativ exponentielle Verteilung) Bediendauer bezüglich ihrer mittleren Wartezeit deutlich günstiger durch Strategien bearbeitet werden, die den Rechnerkern bevorzugt solchen Anforderungen zuteilen, die eine erwartete kurze Restbearbeitungsdauer haben. Bei stark streuenden Bediendauern ist also die Strategie FCFS unvorteilhaft. Bevor man sich jedoch für das Abgehen von der Strategie FCFS und die Anwendung günstigerer Strategien entscheidet, müssen Ergebnisse beider Strategien zum Vergleich vorliegen. Wir behandeln im folgenden eine – unter in der Praxis von Prozeßrechnern vorliegenden Verhältnissen – für stark streuende Bediendauern wartezeitoptimale Strategie MLFCFS (multi level FCFS) und berechnen die mittlere Wartezeit.

Ohne daß bisher Messungen aus realen Systemen vorliegen, kann man aufgrund der Kenntnisse über Teilnehmersysteme davon ausgehen, daß die Bediendauern *nicht* zentralspeicherresidenter Rechenprozesse von Prozeßrechnern ebenfalls stark streuende Bediendauern haben. Eventuell kann das auch für zentralspeicherresidente Prozesse erfüllt sein. Da auch für solche Rechenprozesse kleine mittlere Wartezeiten erwünscht sind, ist es sinnvoll, entsprechende Ergebnisse einer wartezeitoptimalen Abfertigungsstrategie zu berechnen – und mit Ergebnissen der bis heute bei Prozeßrechnern angewandten Strategie FCFS zu vergleichen.

Warteschlangenmodelle mit Prioritäten und Zeitscheiben sind in der Literatur bisher kaum behandelt worden. Eine kürzlich erschienene Arbeit [1] betrachtet ein Modell, das Ankünfte in jeder Priorität zuläßt und innerhalb jeder Priorität Warteschlangen für Anforderungen auch aller höheren Prioritäten vorsieht. Wird eine Anforderung während einer wählbaren

Zeitscheibe nicht fertig, dann wird sie in die ihrer Ankunftspriorität entsprechende Warteschlange der nächstunwichtigeren Priorität zurückgelegt. Zeitscheiben sind nicht unterbrechbar. Verwaltungszeit wird betrachtet und die mittlere Wartezeit berechnet. Verglichen mit dem hier betrachteten Modell ist die Einbeziehung von Verwaltungszeit ein Vorteil, die Nichtunterbrechbarkeit von Zeitscheiben jedoch ein Nachteil. Für Prozeßrechner scheint diese Abfertigungsreihenfolge nicht von Bedeutung zu sein.

Bemerkenswert ist auch eine Arbeit [2], in der die *Laplace-Stieltjes* Transformierte der bedingten Wartezeit berechnet wird. Weitere kürzlich erschienene Arbeiten [3; 9] behandeln ebenfalls ein sehr ähnliches Modell. In all diesen Modellen dürfen Zeitscheiben nicht unterbrochen werden.

Sie sind für Prozeßrechner unbrauchbar, weil bei ihnen die statische Priorität jeder einzelnen Anforderung nicht konsequent beachtet wird. Stattdessen können Anforderungen mit niedriger Priorität vor anderen mit höherer Priorität bedient werden, wenn letztere schon sehr lange bearbeitet worden sind.

Das vorgestellte Modell hat folgende Merkmale

- die statische Priorität jeder Anforderung wird strikt beachtet;
- die Zeitscheibenstrategie (mit endlichen oder unbegrenzten Zeitscheiben) wird nur für Anforderungen gleicher Priorität benutzt;
- Zeitscheiben werden sofort unterbrochen (und später fortgesetzt), wenn eine Anforderung höherer oder gleicher Priorität im Modell ankommt.

Eine allgemeinere Aufgabenstellung wäre, auch Hintergrundtransporte während der Bearbeitung eines Rechenprozesses im Modell zu berücksichtigen. Das ist jedoch bisher in Modellen mit statischen Prioritäten auch bei einfachen Abfertigungsstrategien nicht gelungen. Der Nutzen der hier berechneten Ergebnisse liegt im Vergleich der Resultate unterschiedlicher Strategien. Bei Einbeziehung von Transporten in die Modellierung werden Unterschiede der Ergebnisse verschiedener Strategien zwar kleiner, die Tendenz bleibt jedoch erhalten, vgl. [11].

2 Modellbeschreibung

Wir betrachten ein Modell entsprechend Bild 1 mit $N \geq 1$ unterbrechenden Prioritäten, N Warteschlangen (für jede Priorität eine), unbegrenzter Länge der Warteschlangen und einem Prozessor. Unterbrechende Priorität bedeutet, daß der Prozessor die Arbeit an einer Anforderung der Priorität i sofort unterbricht, wenn eine Anforderung mit einer Priorität $j < i$ eintrifft. Eine unterbrochene Anforderung wird weiter bearbeitet, wenn keine wichtigere Anforderung mehr wartet (preemptive resume). Kleine Zahlenwerte bedeuten hohe Prioritäten. Eine Warteschlange mit der Nummer i heißt auch *Prioritätsebene i.*

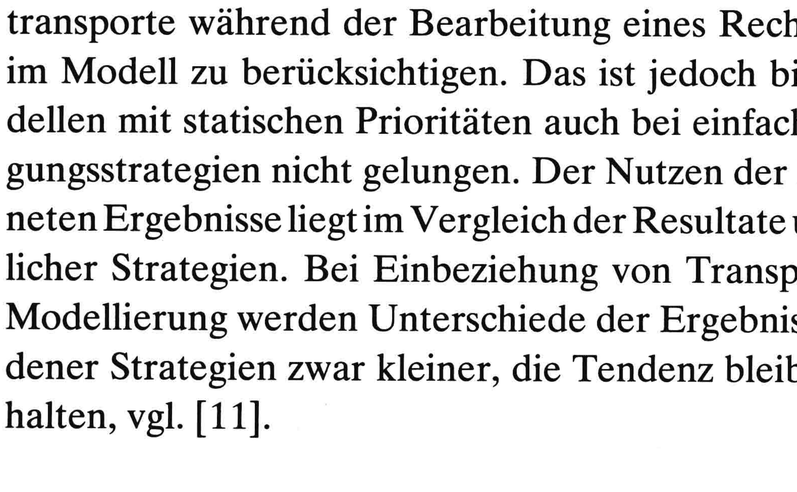

Bild 1. Modell eines Prozeßrechners mit unterbrechenden Prioritäten.
λ_i = Ankunftsrate

Die Ankunftsabstände von Anforderungen der Ebene i sollen negativ exponentiell mit dem Parameter λ_i verteilt sein, d.h. die Ankunftsprozesse sollen *Poisson* Prozesse sein. Die Bediendauer b_i einer Anforderung der Ebene i gehorche einer beliebigen differenzierbaren Verteilungsfunktion $P(b_i \leq t) = B_i(t)$ mit endlichem 2. Moment. Die einzelnen Bediendauern b_i und $b_j (i, j \in N)$ seien unabhängige Zufallsvariable der betrachteten Verteilungsfunktionen (abgekürzt: VFn).

Da alle Anforderungen akzeptiert werden, sind Ankunfts- und Fertigstellungsrate λ_i identisch gleich und durch Summation erhält man

$$\lambda_{\leq N} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{2.1}$$

für alle Anforderungen gemeinsam. Die Rate λ_i heißt auch Durchsatz (Anforderungen pro Zeiteinheit) der Prioritätsebene i; $\lambda_{\leq N}$ ist der Gesamtdurchsatz. Wir interessieren uns für die mittlere Wartezeit bei gegebenem Durchsatz. Normiert man den Durchsatz auf die mittlere Bediendauer β_i von Anforderungen der Ebene i, dann kommt man zu einem allgemein üblichen Maß

$$\varrho_i = \lambda_i \beta_i \,, \tag{2.2}$$

das Angebot der Prioritätsebene i genannt wird. Die Summe aller Angebote ergibt das Gesamtangebot

$$\varrho = \varrho_{\leq N} = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \tag{2.3}$$

und gibt bei $\varrho < 1$ die Auslastung des Prozessors an. Das r-te Moment einer Verteilungsfunktion $P(t)$ berechnet man aus

$$\gamma^{(r)} = \int_0^\infty t^r \, \mathrm{d}P(t) \,. \tag{2.4}$$

Also sind für die Prioritätsebene i die r-ten Momente der Wartezeit-VF $W_i(t)$ und der Bediendauer-VF $B_i(t)$ bestimmt aus

$$W_i^{(r)} = \int_0^\infty t^r \, \mathrm{d}W_i(t) \quad \text{bzw.} \quad \beta_i^{(r)} = \int_0^\infty t^r \, \mathrm{d}B_i(t) \,. \tag{2.5}$$

Anstelle der ersten Momente (= Mittel-, Erwartungswerte) $W_i^{(1)}$ bzw. $\beta_i^{(1)}$ schreibt man vereinfacht W_i bzw. β_i. Für die Übersichtlichkeit der folgenden Formeln ist es nützlich, Ankunftsraten, Angebote und Bediendauer-Momente der Prioritätsebenen 1 bis k entsprechend ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit gewichtet zusammenzufassen und zu schreiben

$$\lambda_{\le k} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \quad \varrho_{\le k} = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i, \quad \beta_{\le k}^{(r)} = \lambda_{\le k}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \beta_i^{(r)} . \tag{2.6}$$

Entsprechend bedeutet

$$\varrho_{<k} = \sum_{i=1}^{k-1} \varrho_i .$$

Im Modell nach Bild 1 unterscheiden wir 2 verschiedene Abfertigungsstrategien für Anforderungen der Prioritätsebene i durch den Prozessor:

FCFS: Anforderungen innerhalb einer Ebene i werden in der Reihenfolge des Eintreffens bearbeitet.

MLFCFS: Anforderungen innerhalb einer Ebene werden entsprechend ihrer schon abgearbeiteten (verbrauchten) Prozessorzeit in verschiedene Warteschlangen innerhalb der Ebene i einsortiert, vgl. Bild 2 und Tabelle 1.

Tabelle 1. Bediendauer-Intervalle der Strategie MLFCFS.

W-Schlagen-Nr.	1	2	⋯	$n+1$
verbrauchte Prozessorzeit t ist im Intervall	$0 \le t < t_{g1}$	$t_{g1} \le t < t_{g2}$		$t_{gn} \le t < t_{gn+1} = \infty$

Jeder Zugang in die Warteschlange 1 des Modells nach Bild 2 unterbricht sofort die Arbeit an einer Anforderung der Warteschlange $k > 1$. Die unterbrochene Anforderung wird später fortgesetzt. Innerhalb der Warteschlange k wird die Strategie FCFS angewandt ($1 \le k \le n+1$).

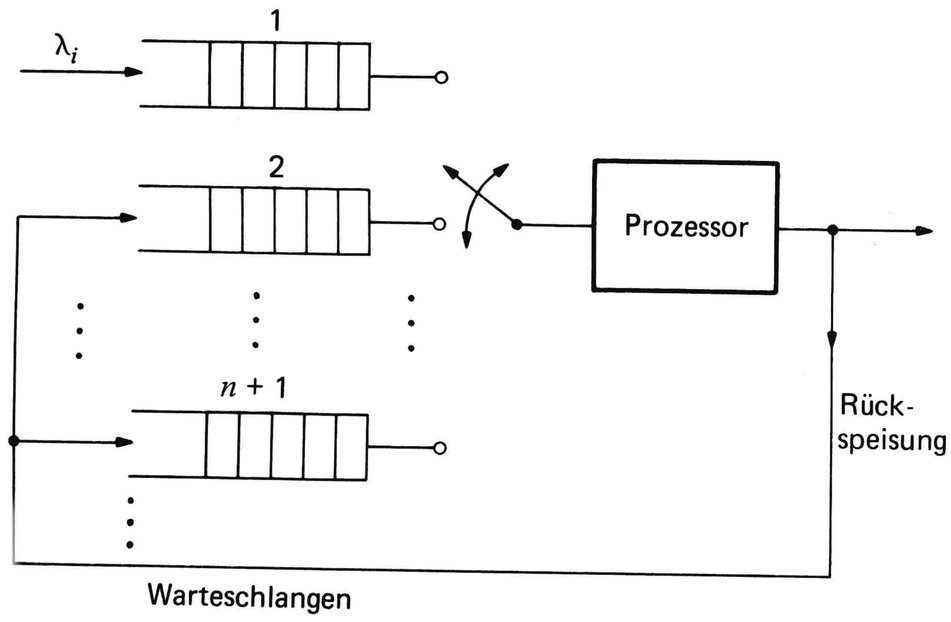

Bild 2. Modell zur Darstellung der Arbeitsweise der Strategie MLFCFS. Warteschlangen mit kleinerer Nummer haben gegenüber anderen unterbrechende Priorität. Innerhalb einer Warteschlange wird die Strategie FCFS angewandt.

Nach [7; 8] wird die mittlere Wartezeit W_i von Anforderungen der Prioritätsebene i dann minimal, wenn die Bediendauer-VF $B_i(t)$ nicht stärker streut als eine negativ exponentielle VF und die Strategie FCFS angewandt wird. Bei stärkerer Streuung sind interne Prioritäten, die mit Zeitscheiben arbeiten, bezüglich der mittleren Wartezeit deutlich günstiger.

Kennt man die beiden ersten Momente einer VF, dann ist daraus die Varianz (= Streuung), σ^2, berechenbar

$$\sigma^2 = \gamma^{(2)} - \gamma^2 . \tag{2.7}$$

Als Variationskoeffizient wird der Ausdruck

$$C = \sigma/\gamma \tag{2.8}$$

bezeichnet. Er eignet sich zum Vergleich von VFn bezüglich ihrer Streuung um ihren Mittelwert. Die negativ exponentielle VF hat einen Variationskoeffizienten $C = 1$. Weniger streuende VFn haben $C < 1$, stärker streuende haben $C > 1$.

3 Bekannte Ergebnisse

Setzt man für das Modell nach Bild 1 voraus, daß die Abfertigung innerhalb jeder Ebene durch die Strategie FCFS erfolgt, dann sind die gesuchten Momente der Wartezeit-VF bei Voraussetzung von *Poisson*-Ankunftsprozessen und beliebigen Bediendauer-VFn berechenbar.

Unter Voraussetzung der Strategie MLFCFS ist bisher nur die mittlere Wartezeit des Modells nach Bild 2 berechenbar [11; 12]. Dieses Modell muß einen *Poisson*-Ankunftsprozeß haben; die Bediendauer-VF darf beliebig sein. Verwaltungsaufwand für Unterbrechungen wird in beiden Fällen nicht berücksichtigt.

3.1 FCFS in jeder Ebene

Die Verweildauer einer Anforderung der Ebene i des Modells nach Bild 1 habe die Momente $V_i^{(r)}$. Sie setzt sich zusammen aus der Wartezeit vor Beginn der Bearbeitung mit den zugehörigen Momenten $W_i^{*(r)}$, der Bediendauer mit den Momenten $\beta_i^{(r)}$ und der Wartezeit wegen Unterbrechungen durch Anforderungen wichtigerer Ebenen. Die letzten beiden Anteile faßt man zusammen und nennt sie Fertigstellungsdauer; die Momente der zugehörigen VF seien $T_i^{(r)}$. Die gesuchten Momente der Wartezeit-VF berechnet man, für $r = 1, 2$, nach [4, 5, 10] aus

$$W_i^{(r)} = V_i^{(r)} - \beta_i^{(r)} = W_i^{*(r)} + T_i^{(r)} - \beta_i^{(r)} . \tag{3.1}$$

Dabei sind

$$W_i^* = \lambda_{\le i} \beta_{\le i}^{(2)} / (2 (1 - \varrho_{\le i}) (1 - \varrho_{<i})) \tag{3.2}$$

$$W_i^{*(2)} = \lambda_{\le i} \beta_{\le i}^{(3)} / (3 (1 - \varrho_{\le i}) (1 - \varrho_{<i})^2) + (W_i^*)^2 + \lambda_{<i} \beta_{<i}^2 \lambda_{\le i} \beta_{\le i}^{(2)} / (2 (1 - \varrho_{\le i}) (1 - \varrho_{<i})^3) \tag{3.3}$$

$$T_i = \beta_i + \beta_i \varrho_{<i} / (1 - \varrho_{<i})$$
$$T_i^{(2)} = \beta_i^{(2)} / (1 - \varrho_{<i})^2 + \beta_i \lambda_{<i} \beta_{\le i}^{(2)} / (1 - \varrho_{<i})^3 . \tag{3.4}$$

Also ist

$$W_i = W_i^* + T_i - \beta_i . \tag{3.5}$$

$W_i^{(2)}$ kann über Gl. (3.1) mit Hilfe der Gln. (3.3) und (3.4) bestimmt werden.

3.2 MLFCFS in der wichtigsten Ebene

Da im Modell nach Bild 1 Anforderungen der wichtigsten Ebene $i = 1$ nicht durch Anforderungen unwichtigerer Ebenen gestört werden, kann man bekannte Ergebnisse des Modells nach Bild 2 als gleichzeitig gültig für die Prioritätsebene 1 von Bild 1 verwenden. Der Index k kennzeichne eine der Warteschlangen des Modells nach Bild 2, ($1 \le k \le n+1$).

Bei der Herleitung eines Ausdrucks für die mittlere Verweil-

zeit der Strategie MLFCFS für Anforderungen mit der Bediendauer $t_{gk-1} < t \leq t_{gk}$, d.h. für solche, die die Warteschlange k des Modells nach Bild 2 erreichen und dann dort fertiggestellt werden, wird in [6] folgendermaßen argumentiert: Man kann die Warteschlange k isoliert betrachten und zwei Tatsachen nutzen:

1. Die Annahme unterbrechender Priorität aller Warteschlangen mit Nummern $j (1 \leq j < k)$ hat zur Folge, daß alle Anforderungen in Warteschlangen mit Nummern $j > k$ ignoriert werden dürfen. Denn ihre Bearbeitung kann die von wichtigeren Anforderungen ($j < k$) nicht stören.
2. Die Verweilzeit einer Anforderung, welche die Warteschlange k erreicht und dort fertiggestellt wird, kann man sich als aus zwei Anteilen zusammengesetzt denken: Der erste Teil umfaßt die Zeit vom Eintreffen einer Anforderung im Modell bis zu dem Zeitpunkt, zu dem sie die Warteschlange k erreicht hat und diese Warteschlange k erstmals bedient wird. Der zweite Teil beginnt unmittelbar nach dem ersten Anteil und endet, wenn die Anforderung fertiggestellt ist. Man sieht leicht ein, daß beide Anteile nicht durch die Abfertigungsreihenfolge innerhalb der Warteschlangen 1 bis $k-1$ beeinflußt werden. (Das kann auch exakt bewiesen werden.) Man kann also innerhalb der Warteschlangen 1 bis $k-1$ irgendeine für die Berechnung geeignete Strategie unterstellen. Es ist sogar zulässig, alle Warteschlangen mit Nummern 1 bis $k-1$ in eine Warteschlange mit Bediendauern t, $(0 < t \leq t_{gk-1})$, zusammenzufassen und dort die Strategie FCFS anzunehmen.

Deshalb ist die Verweilzeit $V(t)$ von Anforderungen mit der Bediendauer t durch Betrachtung eines Modells (M1) mit nur zwei Warteschlangen möglich: Warteschlange 1 umfaßt alle Anforderungen mit Bediendauern $0 < t \leq t_{gk-1}$ und Warteschlange 2 umfaßt solche mit $t_{gk-1} < t \leq t_{gk}$. Anforderungen, die in der Warteschlange k des ursprünglichen Modells (Bild 2) nicht fertiggestellt werden, zählen mit zu den fertigen Anforderungen. Die Bediendauer-VF wird also als bei $t = t_{gk}$ abgeschnitten unterstellt.

Die mittlere Verweilzeit einer *Testanforderung* mit einer Bediendauer $t_{gk-1} < t$ besteht aus der Summe der Bediendauern aller bereits bei ihrem Eintreffen in den Warteschlangen 1 und 2 wartenden Anforderungen plus den Bediendauern aller Anforderungen mit Bediendauern $t < t_{gk-1}$, die während des Aufenthalts der Testanforderung im Modell noch eintreffen, plus der eigenen Bediendauer. Der erste Teil entspricht genau der mittleren Wartezeit eines Modells mit der Strategie FCFS und *einer* Warteschlange, wobei die Bediendauer bei $t = t_{gk}$ abgeschnitten ist.

Dieser Teil lautet

$$W'_k = \lambda\, t_k^{(2)} / (2\,(1 - \lambda\, t_k))\,, \tag{3.6}$$

wobei $\lambda\, t_k$ das Angebot der Warteschlangen 1 bis k des Modells nach Bild 2 ist, mit $\lambda = \lambda_i$. Da während der Verweilzeit dieser Testanforderung wichtigere Anforderungen mit der mittleren Bediendauer t_{k-1} und der Rate λ ankommen, ist die mittlere Verweilzeit dieser Testanforderung nach [6]

$$V(t) = W'_k + t + \lambda\, V(t)\, t_{k-1}\,, \tag{3.7}$$

so daß man schreiben kann

$$V(t) = (W'_k + t)/(1 - \lambda\, t_{k-1})\,. \tag{3.8}$$

Daraus kann durch gewichtete Summation die mittlere Verweilzeit gewonnen werden [12]

$$V = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P_k [W'_k + E_k]}{1 - \lambda\, t_{k-1}}, \quad \text{mit} \quad t_0 = 0\,. \tag{3.9}$$

Dabei ist P_k die Wahrscheinlichkeit, daß die Bediendauer einer Anforderung zwischen t_{gk-1} und t_{gk} liegt

$$P_k = \int_{t_{gk-1}}^{t_{gk}} \mathrm{d}B(t)\,, \tag{3.10}$$

E_k ist der Bediendauer-Erwartungswert von Anforderungen, deren Bediendauer im Intervall $[t_{gk-1}, t_{gk}]$ liegt

$$E_k = \frac{1}{P_k} \int_{t_{gk-1}}^{t_{gk}} t\, \mathrm{d}B(t) \tag{3.11}$$

und t_k der Bediendauer-Erwartungswert einer Anforderung, die weniger als oder gerade die Zeit t_{gk} verbraucht hat

$$t_k = \int_0^{t_{gk}} t\, \mathrm{d}B(t) + t_{gk}[1 - B(t_{gk})]\,. \tag{3,12}$$

Das entsprechende 2. Moment lautet

$$t_k^{(2)} = \int_0^{t_{gk}} t^2\, \mathrm{d}B(t) + t_{gk}^2 [1 - B(t_{gk})]\,. \tag{3.13}$$

Die mittlere Wartezeit ergibt sich aus

$$W = V - \beta\,. \tag{3.14}$$

3.3 Anwendungsbeispiel für ein Modell mit nur einer Prioritätsebene

Bild 3 zeigt beispielhaft Ergebnisse der Strategien FCFS und MLFCFS, angewandt auf 2 unterschiedliche Bediendauer-

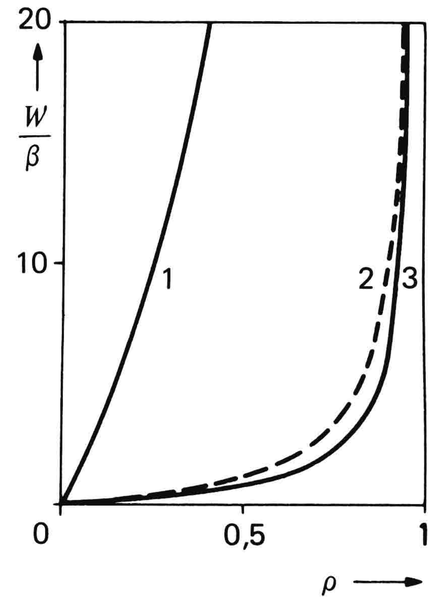

Bild 3. Auf den Bediendauer-Erwartungswert β bezogene mittlere Wartezeit W über dem Angebot ϱ für das Modell nach Bild 2.
Kurve 1: nur 1 Warteschlange (FCFS) und stark streuende Bediendauer-VF ($C = 7$);
Kurve 2: eine oder beliebig viele Warteschlangen (Strategien FCFS oder MLFCFS) und M-Bediendauer-VF ($C = 1$);
Kurve 3: 3 Warteschlangen und stark streuende Bediendauer-VF ($C = 7$) und Intervalle, so daß – vgl. Gl. (3.10) – $P_1 = 0.77$, $P_2 = 0.215$, $P_3 = 0.015$ werden. Strategie MLFCFS.

VFn, im Vergleich. Läßt man im Modell nach Bild 2 nur eine Warteschlange zu, so daß $t_{g1} = \infty$ wird, dann erhält man dasselbe Ergebnis, wie für die 1. Prioritätsebene des Modells nach Bild 1: in beiden Fällen wird dann die Strategie FCFS angewandt. Für stark ($C = 7$) bzw. weniger ($C = 1$) streuende Bediendauern erhält man die Kurven 1 bzw. 2.

Bei Anwendung des Modells nach Bild 2 erhält man für die Anforderungen mit wenig streuender Bediendauer-VF ($C = 1$) unabhängig von der Zahl der Warteschlangen die Kurve 2; für die stark streuende Bediendauer-VF erhält man bei mehreren (hier 3) geeignet gewählten Intervallen t_{gi} die Kurve 3. Bemerkenswert ist der allein durch unterschiedliche Strategien entstandene Unterschied zwischen den Kurven 1 und 3. Bei von $C = 7$ an abnehmendem Variationskoeffizienten würden sich die Kurven 1 und 3 zunehmend der Kurve 2 nähern und sie bei $C = 1$ erreichen. Für weiter abnehmende Werte $C < 1$ wandern die Kurven 1 und 3 in derselben Richtung weiter, so daß die Kurve 1 bei $C = 0$ geringfügig unterhalb der Kurve 2 ankommt, die Kurve 3 wenig oder viel, je nach Anzahl der im Modell nach Bild 2 gewählten Warteschlangen, oberhalb der Kurve 2 liegt.

An diesem Beispiel sieht man, daß die Strategie MLFCFS gegenüber der Strategie FCFS vorteilhaft ist, wenn die Bediendauer-VF der Anforderungen stark streut, d.h. $C > 1$ ist.

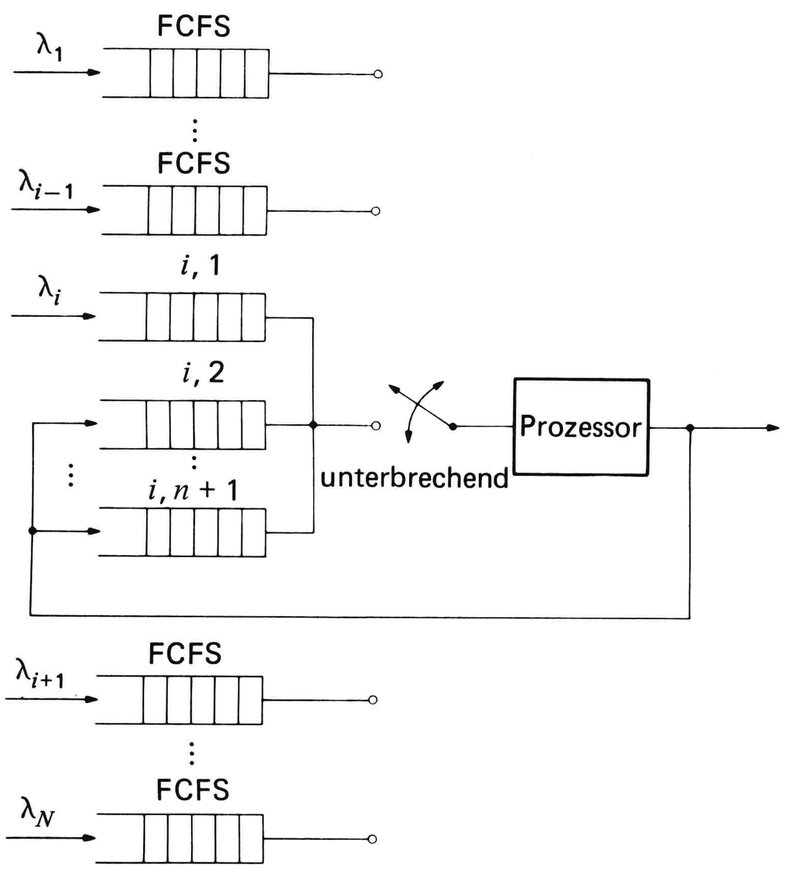

Bild 4. Modell mit unterbrechenden Prioritäten und der Strategie FCFS innerhalb jeder Ebene $j \neq i$, $(j, i \in N)$ mit Ausnahme der Ebene i, wo die Strategie MLFCFS angewandt wird.

4 Neue Resultate

Die Berechnung der mittleren Verweilzeit der Strategie MLFCFS für Anforderungen mit der Bediendauer $t_{gk-1} < t \leq t_{gk}$ wurde in Abschnitt 3.2 auf die Berechnung eines Modells M1 mit nur zwei Warteschlangen zurückgeführt. Dieselbe Technik läßt sich übertragen auf die Berechnung der mittleren Verweilzeiten $V_i(t)$ und V_i des Modells nach Bild 4. In diesem Modell wird in allen Warteschlangen (= Prioritätsebenen) $1, 2, \ldots i-2, i-1, i+1, \ldots N$ die Strategie FCFS angewandt. Nur in der Prioritätsebene i wird die Strategie MLFCFS verwendet. Dabei wird dort das Warteschlangensystem des Modells nach Bild 2 eingesetzt mit der *Poisson*-Ankunfsrate λ_i und der Bediendauer-VF $B_i(t)$. Die einzelnen Warteschlangen der Prioritätsebene i werden mit i, k indiziert $(1 \leq k \leq n+1)$. Unter Wiederholung des in Abschnitt 3.2 besprochenen Gedankenganges wird die mittlere Verweilzeit $V_i(t)$ von Anforderungen der Priorität i mit Bediendauern $t_{gi,k-1} < t \leq t_{gi,k}$ bzw. deren mittlere Verweilzeit V_i berechnet. Man darf wieder die Warteschlange i, k isoliert betrachten und folgende Tatsachen nutzen:

1. Die Annahme unterbrechender Priorität aller Warteschlangen mit Nummern $j (1 \leq j < k)$ und $r (1 \leq r \leq i-1)$ hat zur Folge, daß alle Warteschlangen mit Nummern $j > k$ *und* $r > i$ ignoriert werden dürfen. Denn ihre Bearbeitung kann die von wichtigeren Anforderungen nicht stören.
2. Die Verweilzeit einer Anforderung, welche die Warteschlange i, k erreicht und dort fertiggestellt wird, kann man sich aus zwei Anteilen zusammengesetzt denken. Der erste Teil umfaßt die Zeit vom Eintreffen dieser Anforderung im Modell bis zu dem Zeitpunkt, zu dem sie die Warteschlange i, k erreicht hat und diese Warteschlange i, k erstmals bedient wird. Der zweite Teil schließt unmittelbar an den ersten Teil an und endet mit der Fertigstellung der Anforderung.

   Beide Anteile sind nicht durch die Abfertigungsreihenfolge innerhalb der Warteschlangen 1 bis $i, k-1$ beeinflußbar. Man kann also in den Warteschlangen 1 bis $i, k-1$ irgendeine Strategie unterstellen oder diese Warteschlangen auch in eine Warteschlange W1 mit beliebiger Abfertigungsstrategie (z.B. FCFS) zusammenfassen.

Unterstellt man die Bediendauer-VF von Anforderungen mit der Ankunftsrate λ_i sei $B_i(t)$, dann ist die durch Gewichtung gewonnene gemeinsame Bediendauer-VF aller Anforderungen der Prioritäten $j (1 \leq j \leq i, k)$

$$B_{\leq i,k}(t) = \lambda_{\leq i}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j B_j(t) + \lambda_i P_i(t) \right] \tag{4.1}$$

$$\text{mit} \quad P_i(t) = \begin{cases} B_i(t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_{gi,k} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In $B_{\leq i,k}(t)$ sind nur Anforderungen der Priorität i enthalten, deren Bediendauern $t \leq t_{gi,k}$ sind. Gibt es Anforderungen mit $t > t_{gi,k}$, dann hat die VF $B_{\leq i,k}(t)$ bei $t = t_{gi,k}$ also einen Sprung. Das r-te Moment der gemeinsamen Bediendauer-VF $B_{\leq i,k}(t)$ ist

$$t^{(r)}_{\leq i,k} = \lambda_{\leq i}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \int_0^{\infty} t^r \, \mathrm{d}B_j(t) + \lambda_i \left\{ \int_0^{t_{gi,k}} t^r \, \mathrm{d}B_i(t) + t^r_{gi,k}[1 - B_i(t_{gi,k})] \right\} \right]$$

und mit Gln. (2.6), (3.13)

$$t^{(r)}_{\leq i,k} = \lambda_{\leq i}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \beta_j^{(r)} + \lambda_i t_k^{(r)} \right]. \tag{4.2}$$

Der weitere Gang der Rechnung verläuft analog, wie für das einfache Modell nach Bild 2:

Die mittlere Verweilzeit einer Testanforderung mit einer Bediendauer $t_{gi,k-1} < t \leq t_{gi,k}$ besteht aus der Summe der Bediendauern aller bei ihrem Eintreffen bereits wartenden Anforderungen der Warteschlangen $j \leq i, k$ plus den Bediendauern aller Anforderungen mit Bediendauern $t < t_{gi,k-1}$, die während des Aufenthalts der Testanforderung im Modell noch eintreffen, plus der eigenen Bediendauer. Der erste Teil entspricht exakt der mittleren Wartezeit eines Modells mit einer Warteschlange W1 und der Strategie FCFS, wobei die Bediendauer-VF durch Gl. (4.1) gegeben ist. Das heißt, entsprechend Gl. (3.6), ist diese mittlere Wartezeit

$$W'_{i,k} = (\lambda_{\leq i}\, t^{(2)}_{\leq i,k})/(2\,(1 - \varrho_{<i} - \lambda_i\, t_k))\,. \tag{4.3}$$

Da während der Verweilzeit $V_i(t)$ dieser Testanforderung wichtigere Anforderungen mit mittleren Bediendauern $t_{\leq i,k-1}$, vgl. Gl. (4.2) mit der Rate $\lambda_{\leq i}$ ankommen, ist die Verweilzeit der Testanforderung, welche die Bediendauer t hat

$$V_i(t) = W'_{i,k} + t + \lambda_{\leq i}\, V_i(t)\, t_{\leq i,k-1}\,, \tag{4.4}$$

woraus unmittelbar folgt

$$V_i(t) = (W'_{i,k} + t)/(1 - \lambda_{\leq i}\, t_{\leq i,k-1})\,. \tag{4.5}$$

Wie in Gl. (3.9) erhält man auch hier die mittlere Verweilzeit für Anforderung der Prioritätsebene i, in der die Strategie MLFCFS angewandt wird, durch gewichtete Summation

$$V_i = \sum_{k=1}^{n+1} (P_{i,k}[W'_{i,k} + E_{i,k}])/(1 - \lambda t_{\leq i,k-1})\,. \tag{4.6}$$

Anstelle der Bediendauer t in Gl. (4.5) tritt dabei der Bediendauer-Erwartungswert $E_{i,k}$ von Anforderungen, deren Bediendauer im Intervall $[t_{gi,k-1}, t_{gi,k}]$ liegt, vgl. Gl. (3.11). Entsprechend Gl. (3.10) ist

$$P_{i,k} = \sum_{t_{gi,k-1}}^{t_{gi,k}} \mathrm{d}B_i(t) = B(t_{gi,k}) - B(t_{gi,k-1})\,. \tag{4.7}$$

Diese Formeln sind auch sofort analog anwendbar, wenn neben Anforderungen der Priorität i noch andere der Priorität $j \neq i$ durch die Strategie MLFCFS bearbeitet werden.

Betrachtet man weiterhin die Ebene i und unterstellt, die Strategie MLFCFS würde in den Ebenen i und $j < i$ angewandt, während in den übrigen Ebenen $r \neq j < i$ die Strategie FCFS angewandt wird, dann gelten die Gln. (4.1) bis (4.7) unverändert weiter. Mit anderen Worten, es ist für die Ebene i bedeutungslos, welche Strategie in einer Ebene mit anderer Priorität angewandt wird. Diese Tatsache wurde schon bei der Herleitung der Formeln für die Ebene i genutzt.

Die mittlere Wartezeit berechnet man, wie in Gl. (3.1) zu

$$W_i = V_i - \beta_i \tag{4.8}$$

und die mittlere Wartezeit von Anforderungen mit der Bediendauer t, $(t_{gi,k-1} < t \leq t_{gi,k})$ ist

$$W_i(t) = (W'_{i,k} + t\,\lambda_{\leq i}\, t_{\leq i,k-1})/(1 - \lambda_{\leq i}\, t_{\leq i,k-1})\,. \tag{4.9}$$

Schließlich läßt sich durch Übertragung der Ergebnisse des Modells nach Bild 1, vgl. Gln. (3.1) bis (3.5), für das Modell nach Bild 4 das 2. Moment der Wartezeit-VF $W^{(2)}_{i,1}$ der Anforderungen der Ebene i berechnen, die eine Bediendauer $t (0 \leq t \leq t_{gi,1})$ haben. Dabei müssen auch die 3. Momente der Bediendauer-VFn als endlich vorausgesetzt werden.

5 Mittlere Wartezeit der Priorität i bei optimaler Strategie

Schon in der Einleitung wurde betont, daß die Strategie MLFCFS nur dann für Anforderungen der Prioritätsebene i eine kleinere mittlere Wartezeit als die Strategie FCFS erzielt, wenn die Bediendauer-VF der Anforderungen stark streut, d.h. $C > 1$ ist. Bei $C \leq 1$ ist die Strategie FCFS optimal. In der Literatur hat sich zur Approximation stark streuender VFn die hyperexponentielle VF n-ten Grades (H_n-VF) eingebürgert

$$P(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\, \mathrm{e}^{-\mu_i t}\,;$$

$$\mu_i > 0, w_i > 0, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,. \tag{5.1}$$

Ein Nachteil ist, daß dann die mittlere Wartezeit nur mit Strategien minimiert werden kann, bei denen zumindest zeitweise infinitesimal kleine Zeitscheiben (processor sharing) nötig sind [6, 7]. Überträgt man diese Erkenntnis auf reale Rechner, bei denen jede Zeitscheibe Verwaltungszeit hervorruft, dann sind diese Strategien nicht akzeptabel. Man behilft sich bei der Anwendung dieser Strategien in der Praxis mit suboptimalen Strategien, bei denen die Zeitscheiben endlich groß sind.

Probleme treten dabei insbesondere bei der Wahl der Anzahl und Länge der Zeitscheiben auf. Die Anzahl bestimmt den Verwaltungsaufwand, die Länge das Abweichen von der minimal möglichen mittleren Wartezeit. Die in den folgenden Beispielen gewählten Zeitscheibenlängen ergeben sich, wenn man anstelle der hier unterstellten Hyperexponential-VFn äquivalente stückweise exponentielle Verteilungsfunktionen [11] ansetzen würde. Für letztere wären diese Zeitscheibenlängen wartezeitoptimal.

5.1 Beispiele

In diesem Abschnitt unterstellen wir das Modell nach Bild 4 mit $N = 3$ Prioritätsebenen und gleichmäßig auf diese Ebenen aufgeteiltem Gesamtangebot, nämlich $\varrho_i = \varrho/N$. Außerdem unterstellen wir (der Einfachheit halber) dieselbe Bediendauer-VF für alle Anforderungen. Zunächst behandeln wir das

Beispiel 1: H_2-Bediendauer-VF (nach Gl. (5.1) mit $n = 2$) und den Parametern $W_1 = 0.9, W_2 = 0.1, \mu_1 = 1.24\,\mathrm{s}^{-1}, \mu_2 = 0.05\,\mathrm{s}^{-1}$, $C = 3{,}5$. Zwei Zeitscheibenlängen $t_1 = t_g = 2\,\mathrm{s}, t_2 = \infty$.

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 4 kann die mittlere Wartezeit für beide Strategien, FCFS und MLFCFS, jeweils angewandt auf Anforderungen innerhalb jeder Prioritätsebene berechnet werden. Bild 5 zeigt die bezogene mittlere Wartezeit der Prioritätsebene i über dem Gesamtangebot ϱ. Für jede Priorität sind die Ergebnisse der Strategien FCFS (ausgezogen) und MLFCFS (gestrichelt) angegeben. Es ist

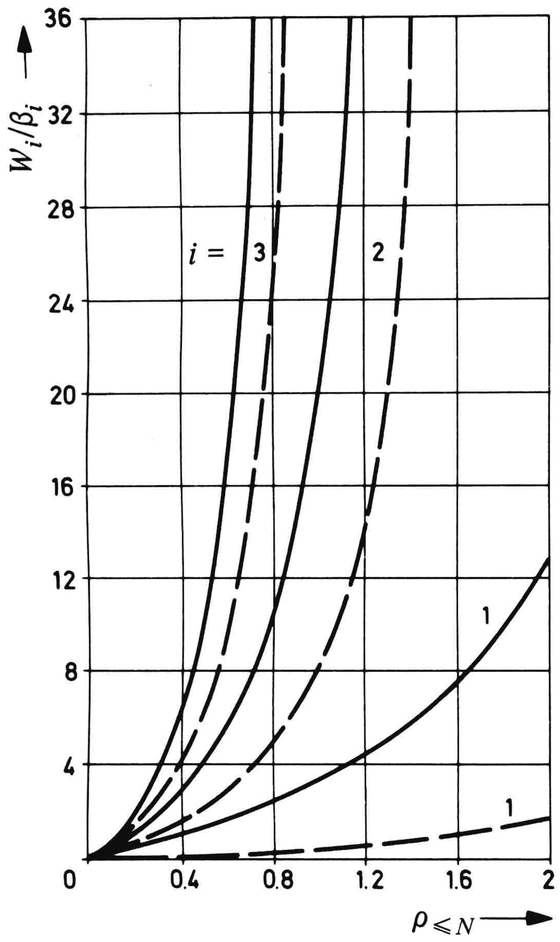

Bild 5. Bezogene mittlere Wartezeit über dem Gesamtangebot ϱ für das Modell nach Bild 4 mit $N = 3$ Prioritäten und den Strategien FCFS (ausgezogen) und MLFCFS (gestrichelt). Die Parameter sind in Beispiel 1, Abschnitt 5.1 angegeben.

auch der Fall des gesättigten Ankunftsprozesses $\varrho > 1$ mit dargestellt. Vergleicht man die Wartezeiten der beiden Strategien innerhalb der Ebene i, dann wird bei gegebenem Gesamtangebot der prozentuale Unterschied um so größer, je kleiner (unwichtiger) die Priorität ist. Das heißt, auch für niedrige Prioritäten lohnt sich das Zeitscheibenverfahren.

Beispiel 2: H_2-Bediendauer-VFn wie im Beispiel 1 in den Prioritätsebenen $j \neq i$ und negativ exponentieller (M-)VF in Ebene i.

Unterstellt man in einer der Prioritätsebenen anstelle einer H_2-VF eine M-VF, dann erzielen die Strategien MLFCFS und

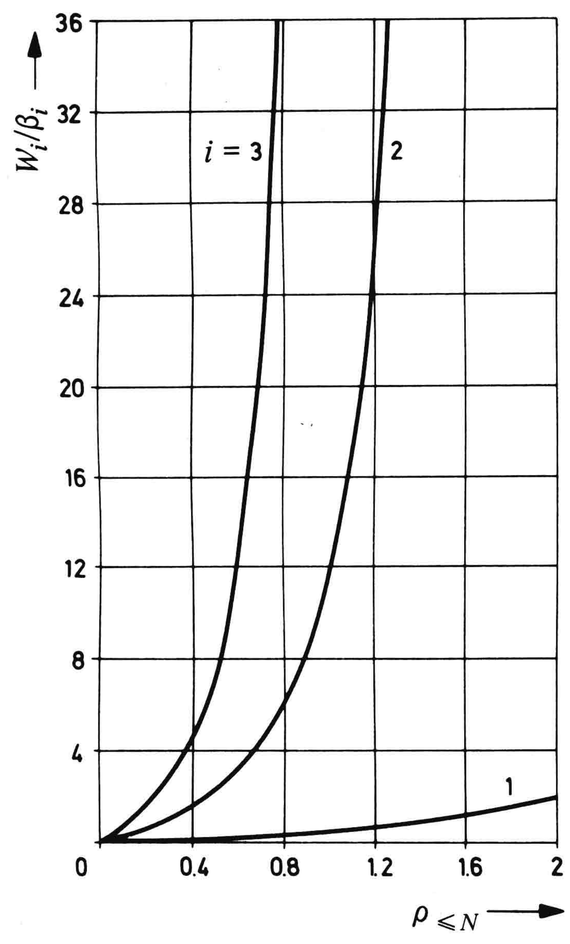

Bild 6. Bezogene mittlere Wartezeit über dem Gesamtangebot ϱ für das Modell nach Bild 4 mit $N = 3$ Prioritäten, vgl. Beispiel 2.

FCFS dort dasselbe Ergebnis. Bild 6 zeigt das Ergebnis. Durch Vergleich mit Bild 5 stellt man fest, daß dort die Kurven der Strategie MLFCFS unterhalb der entsprechenden Kurven von Bild 6 verlaufen. Es gilt also unabhängig von der Prioritätsebene hier dasselbe schon in Bild 3 beobachtete Gesetz, daß man bei geeigneter Bearbeitung (Strategie MLFCFS) von Anforderungen mit stark streuender Bediendauer-VF ($C > 1$), spürbar kleinere mittlere Wartezeiten erzielt, als mit der Strategie FCFS für eine M-VF.

In Gl. (4.9) wurde für die Strategie MLFCFS ein Ausdruck für die bedingte mittlere Wartezeit $W_i(t)$ von Anforderungen mit der Bediendauer t der Prioritätsebene i angegeben. Bild 7 zeigt ein entsprechendes Ergebnis für das Beispiel 1 und die Priorität 2 bei drei verschiedenen Gesamtangeboten. Der Sprung aller Kurven bei $t = 2$ s rührt daher, daß Anforderungen mit bis zu 2 s Bediendauer unterbrechende Priorität gegenüber den übrigen haben und deshalb bevorzugt bedient werden.

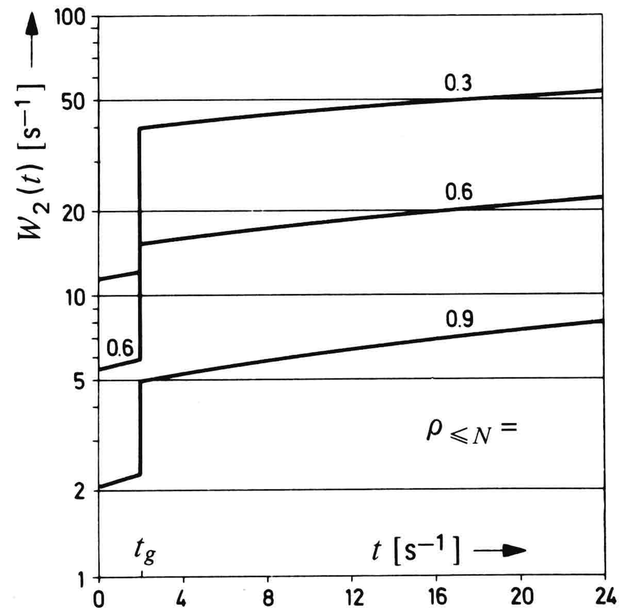

Bild 7. Mittlere Wartezeit von Anforderungen der Prioritätsebene 2 in Abhängigkeit der Bediendauer t für die Parameter des Beispiels 1 und das Modell nach Bild 4. Kurvenparameter ist das Gesamtangebot ϱ.

Dieser Sprung erscheint für manche praktische Anwendungen unerwünscht hoch zu sein: besser wäre eine mit t kontinuierlich wachsende mittlere Wartezeit $W_i(t)$. Ein solcher Kurvenverlauf ist unter Nutzung noch verbliebener Freiheitsgrade der Strategie MLFCFS möglich und bereits in [12] beschrieben. Dabei müssen im Modell nach Bild 2 bzw. in der Prioritätsebene i des Modells nach Bild 4 Anforderungen der Warteschlangen $2 \leq k \leq n + 1$ – abweichend von der Strategie FCFS innerhalb dieser Warteschlangen – nach wachsender schon verbrauchter Prozessorzeit geordnet werden und nach der Strategie SET (shortest elapsed time first) bearbeitet werden. Dabei wird eine Anforderung weiterhin nur durch in Ebenen mit unterbrechender Priorität eintreffende Anforderungen unterbrochen. Die Rechenergebnisse von Abschnitt 4 gelten weiterhin. Ein weiterer Vorteil dieser modifizierten Strategie ist, daß Verwaltungsaufwand gespart wird: Anstelle nach Bearbeitung der einzigen Anforderung der Ebene i, k für die Dauer $t_{gi,k}$ auf die in der Ebene i, $k + 1$ auf Platz 1 der Warteschlange wartende Anforderung überzugehen, wird an derselben Anforderung (die jetzt zur Ebene i, $k + 1$ gehört) weitergearbeitet.

Einen Effekt in diese Richtung erzielt man, wenn man mehr

als zwei Zeitscheibenlängen einführt und die Strategie MLFCFS benutzt:

Beispiel 3: H_2-Bediendauer-VFn, wie in den Beispielen 1 und 2, aber drei Zeitscheibenlängen $t_1 = t_{g1} = 0{,}25\,\text{s}$, $t_2 = t_{g2} = 5{,}8\,\text{s}$, $t_3 = \infty$.

Bild 8 zeigt für dieses Beispiel die mittlere Wartezeit $W_2(t)$ der Prioritätsebene 2 bei Bearbeitung mit der Strategie MLFCFS. Durch Vergleich mit Bild 7 sieht man, daß durch die 2 Sprünge in Bild 8 die Härte des einzigen Sprungs in Bild 7 abgemildert wird.

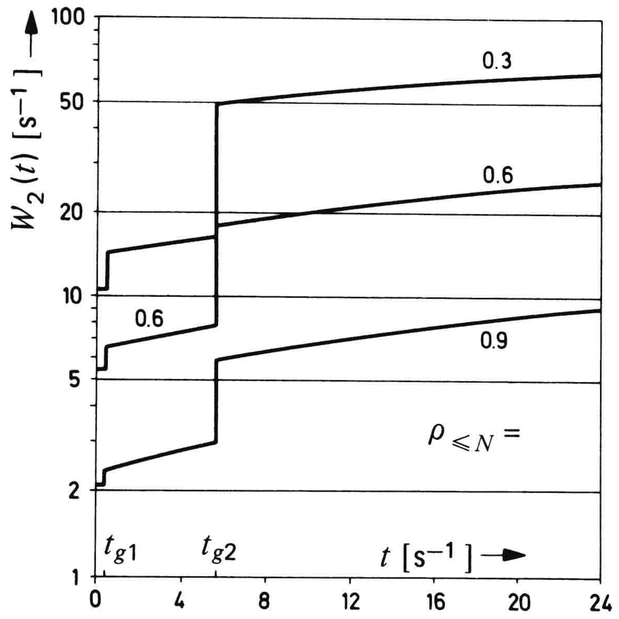

Bild 8. Mittlere Wartezeit der Priorität 2 in Abhängigkeit der Bediendauer t für das Beispiel 3 und das Modell nach Bild 4. Kurvenparameter ist das Gesamtangebot ϱ.

Bezüglich der bezogenen mittleren Wartezeit als Funktion des Gesamtangebotes ändert sich gegenüber dem Beispiel 1, vgl. Ergebnisse in Bild 5, nichts. Das liegt daran, daß bei der Berechnung sowohl der Strategie FCFS als auch von MLFCFS nur die 1. und 2. Momente der Bediendauer-VF eingehen. Die Momente sind aber in beiden Beispielen 1 und 2 gleich groß.

Bemerkungen:

Die diesem Bericht zugrunde liegenden Arbeiten wurden mit Mitteln des Bundesministers für Forschung und Technologie gefördert. Der Bundesminister für Forschung und Technologie übernimmt keine Gewähr für die Richtigkeit, die Genauigkeit und Vollständigkeit der Angaben sowie für die Beachtung privater Rechte Dritter.

Dieser Beitrag ist eine etwas ausführlichere Fassung eines Vortrages, der auf dem 9th International Teletraffic Congress, Torremolinos/Spain, Oct. 16–24, 1979 veröffentlicht worden ist. Der Tagungsband dieses Kongresses ist jedoch nur an die Teilnehmer verteilt worden und deshalb nicht allgemein zugänglich.

Literatur

[1] *Babad, J.M.:* A generalized multi-entrance time-sharing priority queue. Journ. ACM, Vol. 22, No. 2, April 1975, pp. 231–247.

[2] *Fujiki, M.; Gambe, E.:* Conditional waiting time in a multilevel feedback priority queueing model. Electron. and Comm. in Japan, Vol. 52-C, No. 1, 1969, pp. 129–136.

[3] *Rosberg, Z.; Adiri, I.:* Multi-level queues with external priorities. Journ. ACM, Vol. 23, No. 4, Oct. 1976, pp. 680–690.

[4] *White, H.; Christie, L.S.:* Queueing with preemptive priorities or with breakdown. Oper. Res. (USA), Vol. 6, No. 1, 1958, pp. 79–95.

[5] *Miller, R.G.:* Priority queues. Annals Math. Stat. 31, 1960, pp. 86–103.

[6] *Kleinrock, L.; Muntz, R.R.:* Multi-level processor-sharing queueing models for time-shared systems. 6th Int. Teletraff. Congr., München 1970, Congressbook pp. 341/1–8.

[7] *Olivier, G.:* Optimale Zeitzuteilung für wartende Rechenaufgaben. Elektron. Rechenanl. 9 (1967), H. 5, S. 218–224.

[8] *Sakata, M.; Noguchi, S.; Oizumi, J.:* Optimal scheduling in single-processor systems. Proc. 3rd Hawaii Int. Conf. Syst. Scienc. 1970, Univ. of Hawaii, pp. 708–711.

[9] *Guimaraes, C.:* A foreground-background time-sharing queue with general service times. Proc. Int. Symp. Operat. Syst., Rocquencourt, France, April 1974, Lect. Notes Comp. Science, 16, Springer Verlag, Berlin, New York 1974

[10] *Chang, W.:* Single-server queueing processes in computing systems. IBM-Syst. Journal, No. 1, 1970, pp. 36–71.

[11] *Walke, B.:* Realzeitrechner-Modelle, Theorie und Anwendung. Oldenbourg Verlag München, Januar 1978, Reihe Datenverarbeitung.

[12] *Walke, B.; Küspert, H.J.:* Teilnehmerrechensysteme: Mittlere Verweilzeiten bei optimaler Rechenzeitzuteilung. Elektron. Rechenanl. 13 (1971), H. 5, S. 193–199.