Strategien zur Leistungssteigerung von Rechenanlagen*)

B. Walke

AEG-TELEFUNKEN, Forschungsinstitut Ulm, Postfach 1730, 7900 Ulm

Stichworte: *Betriebsmittelverwaltung, Warteschlangen-Netz, Durchsatz-Optimierung, technisch-wissenschaftlicher Rechenzentrumsbetrieb, Dimensionierung leistungs- preisgünstiger Rechenanlagen*

Zusammenfassung: *Die maximal erzielbare Leistung einer Rechenanlage hängt einerseits von der Leistung bzw. Größe der „wichtigen" Betriebsmittel Rechnerkern, Transportkanal zwischen Zentral- und Hintergrundspeicher und Zentralspeicher, andererseits von den Strategien der Betriebsmittelverwaltung ab. Es wird gezeigt, daß günstig ausgewählte Strategien erheblich zur Leistungssteigerung einer Rechenanlage beitragen können, so daß eine bestimmte geforderte Leistung mit weniger aufwendigen (billigeren) Betriebsmitteln erbracht werden kann. So betrachtet, liefert die Arbeit einen Beitrag zum Entwurf leistungs- preisgünstiger Rechenanlagen. Die Ergebnisse gelten vor allem für den technisch-wissenschaftlichen Rechenzentrumsbetrieb.*

In einem ersten Schritt wird für ein verkehrstheoretisches Rechnermodell gezeigt, welche Durchsatzsteigerung allein durch Anwendung einer optimalen gegenüber einer einfachen Rechnerkern-Zuteilungsstrategie erreichbar ist. Im zweiten Schritt wird die üblicherweise verwendete Zentralspeicher-Belegungsstrategie FCFS durch eine neu entwickelte verdrängende Strategie ersetzt. Dadurch wird insbesondere bei kleinem Zentralspeicher eine weitere erhebliche Durchsatzsteigerung erreicht. Die berechneten Durchsatz-Verbesserungen werden durch Simulation bestätigt.

Key-words: *Resource scheduling, queueing network, throughput optimization, scientific computer applications, performance-cost optimal configurations*

Abstract: *The maximum throughput of a computer system not only depends on the speed of CPU and transport channel between working and background storage and the capacity of main memory but also largely on the scheduling strategies chosen. It is shown how much throughput can be enhanced by suitably chosen strategies so that a given performance could be reached with less expensive resources. From this aspect this paper contributes to the construction of performance-cost-optimal computer systems. The computed results are especially valuable for scientific computer systems.*

We first introduce an optimal CPU-scheduling algorithm which reaches a much larger throughput than the simple FCFS algorithm. Then we show that the usually applied FCFS algorithm to allocate main memory is a poor one. Throughput could be enhanced distinctly by using a new developed program-replacing algorithm. In every case throughput is computed for a queueing network model of a computer system.

1. Einleitung

Es ist für fast jede Anwendung von Rechenanlagen vorteilhaft, wenn die Betriebsmittel (Rechnerkern, Transportkanäle, Zentralspeicher, Peripheriegeräte) im Hinblick auf eine möglichst große Leistung (= Durchsatz, Programme pro Zeiteinheit) aufeinander abgestimmt werden. Den verwendeten Strategien der Betriebsmittelverwaltung fällt bei der Dimensionierung einer Rechenanlage *deshalb* eine entscheidende Rolle zu, weil sie den Durchsatz einzelner Betriebsmittel erheblich beeinflussen können. Andere Betriebsziele, wie z.B. kleine mittlere Antwortzeit oder gerechte Bedienung bei Teilnehmersystemen oder Unterbietung einer vorgeschriebenen Antwortzeit für priviligierte Aufgaben bei Prozeßrechnern, können generell nur durch Verzicht auf einen Betrieb bei maximalem Durchsatz erreicht werden. Solche Betriebsziele werden jedoch bei um so höherer Belastung zufriedenstellend berücksichtigt, je höher die maximale Leistung (Durchsatz) einer gegebenen Anlage ist [2, 6].

Die vorliegende Arbeit demonstriert für ein Modell einer Rechenanlage (Bild 1), wie der maximale Durchsatz D durch die Dimensionierung der wichtigen Betriebsmittel „Rechnerkern" (RK), „Zentralspeicher" (ZSP) und „Transportkanal zum Hintergrundspeicher" und durch verschiedene Strategien beeinflußt wird. Das zu bearbeitende Aufgabenprofil der Rechenanlage wird vereinfacht durch zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben, eine für die Dauer eines Transports zwischen Zentral- und Hintergrundspeicher, die andere für die Dauer der Belegung des Rechnerkerns durch eine Aufgabe zwischen zwei Transporten dieser Aufgabe. Der Platzbedarf eines Programms im Zentralspeicher wird pauschal berücksichtigt: jedes Programm braucht „einen Platz". Wieviel K Bytes man für „einen Platz" benötigt, ist im Rahmen des betrachteten Modells und der angestrebten Aussage von untergeordneter Bedeutung. An anderer Stelle [5] sind dazu ausführliche Untersuchungen angestellt worden. Peripherie-

*) Die Arbeit wurde zu 50 % durch das 2. DV-Programm der Deutschen Bundesregierung gefördert.

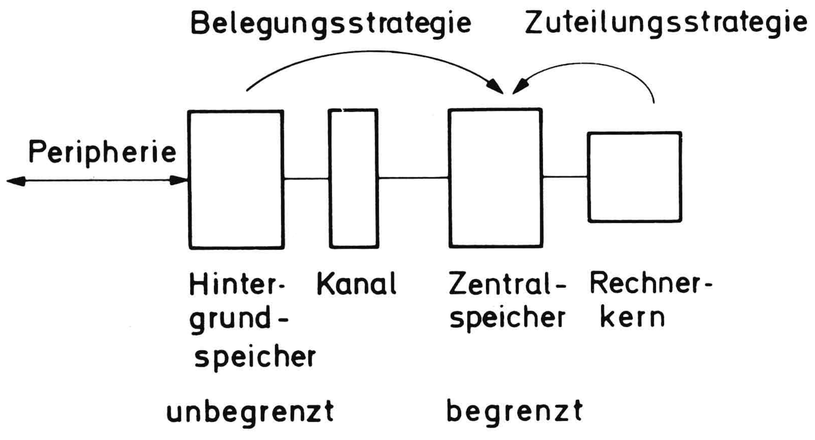


Bild 1. „Wichtige" Betriebsmittel einer Rechenanlage und betrachtete Strategien zu ihrem Einsatz.
Im Zentralspeicher haben gleichzeitig n Programme Platz.

geräte sind in die Modellberechnung nicht einbezogen worden. Sie müssen so dimensioniert werden, daß sie die Leistung der Anlage nicht spürbar beschränken.

In den Abschnitten 2, 3 und 4 werden Modelle der Programm-Bearbeitung, Strategien und das Rechnermodell eingeführt. Im Abschnitt 5 werden Rechenergebnisse für den maximalen Durchsatz bei gegebenen Strategien verglichen. Es werden eine einfache und eine optimale Rechnerkern-Zuteilungsstrategie sowie die übliche Zentralspeicher-Belegungsstrategie FCFS und eine neu entwickelte verdrängende Strategie VERD betrachtet. Die Rechenzeit zwischen zwei Transporten einer Aufgabe wird durch eine entartet negativ exponentielle Verteilung angenähert. Im Abschnitt 6 werden Simulationsergebnisse für eine bessere Rechenzeit-Näherung durch eine stückweise negativ exponentielle Verteilung mit den Rechenergebnissen des ersten Teils verglichen. Dabei werden die Aussagen des ersten Teils bestätigt.

Die Eigenschaften der „wichtigen" Betriebsmittel Rechnerkern, Transportkanal (einschließlich daran angeschlossenem Hintergrundspeicher) und Zentralspeicher werden durch die Erwartungswerte für Aufgaben-Rechenzeit $E(T_R)$ und Aufgaben-Transportzeit $E(T_H)$ sowie die Zahl der Programmplätze des begrenzt großen Zentralspeichers berücksichtigt. Leistungsfähige Betriebsmittel sind durch kleine Erwartungswerte für die genannten Zeiten bzw. eine große Zahl von Programmplätzen gekennzeichnet.

2. Modell der Programm-Bearbeitung

Bei praktisch allen Rechenanlagen beobachtet man, daß eine Programmbearbeitung aus einem mehrfach durchlaufenen Zyklus – Transportieren, Rechnen – besteht (Bild 2a).

Die Rechenarbeit muß immer wieder unterbrochen werden, weil Daten für die Fortsetzung fehlen und erst in den Zentralspeicher transportiert werden müssen. Wir unterstellen in dieser Arbeit, daß weder die Zahl der Zyklen im voraus bekannt noch die Durchlaufdauer benachbarter Zyklen korreliert ist. Laut Messungen (siehe in [5]) trifft das näherungsweise zu. Die Programmbearbeitung in der Rechenanlage wird als statistischer Prozeß angesehen.
Die Transport- und Rechenzeit einer Teilaufgabe (ein Zyklus) wird als Zufallsvariable mit bekannten Wahrschein-

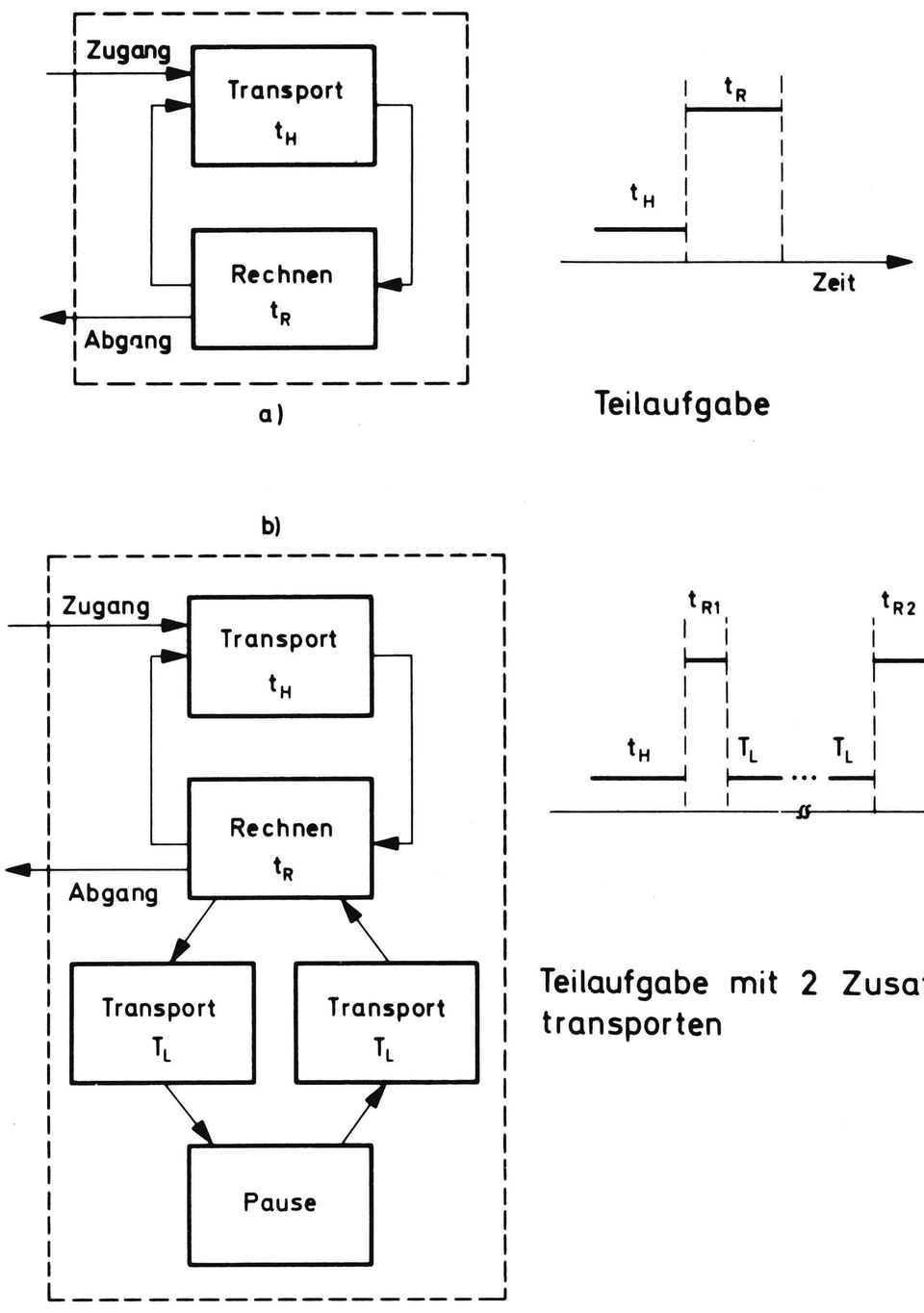


Bild 2. Bearbeitung eines Programms a) ohne b) mit strategisch bedingter Verdrängungspause

lichkeitsverteilungsfunktionen betrachtet. Die Teilaufgaben-transportzeit t_H darf durch eine negativ exponentielle Verteilung mit dem Erwartungswert $E(t_H) = 1/\mu_H$ angenähert werden [5]:

$$P(t_H \leqslant t) = 1 - e^{-\mu_H t}. \tag{2.1}$$

Die Teilaufgaben-Rechenzeit t_R streut viel stärker und wird für die Durchsatzberechnung durch eine entartet negativ exponentielle Verteilung (Bild 3b) mit dem Erwartungswert $E(t_R)$ angenähert:

$$P(t_R \leqslant t) = 1 - (1 - p_g)\, e^{-\mu t} \tag{2.2}$$

$$E(t_R) = \frac{1 - p_g}{\mu} \tag{2.3}$$

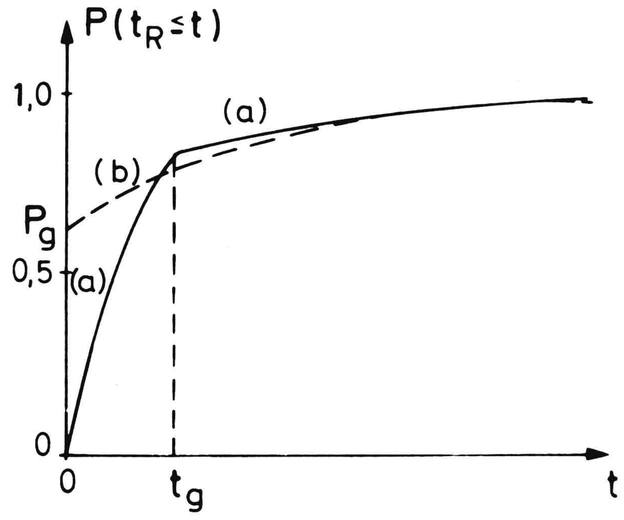


Bild 3. Stückweise (a) und entartet (b) negativ exponentielle Verteilungen

Die Wirksamkeit der untersuchten Strategien hängt u.U. stark von der Streuung der Teilaufgabenrechenzeiten ab. Wir verwenden als Maß für die Streuung, wie allgemein üblich, den Variationskoeffizienten

$$VK = \sqrt{\text{Varianz}} \,/\, \text{Erwartungswert} = (1 + p_g) / (1 - p_g). \tag{2.4}$$

Die Verteilung Gl. (2.2) erlaubt eine geschlossene Durchsatzberechnung, ist aber als Näherung an Meßkurven deutlich schlechter als die stückweise exponentielle Verteilung [2]. Das ist auch der Grund, weshalb später die Rechenergebnisse und Simulationsergebnisse unter Verwendung der stückweisen Verteilung verglichen werden müssen.

Unsere in Abschnitt 3 beschriebene neue Zentralspeicher-Belegungsstrategie kann veranlassen, daß die Rechenarbeit an einer Teilaufgabe vorübergehend unterbrochen wird und alle Daten in den Hintergrundspeicher verdrängt werden (Bild 2b). Die zugehörigen Verdränge- und Wiederlade-Transporte sollen je die zufällige Zeit T_L dauern*). T_L sei entsprechend (Gl. 2.1) verteilt und habe den Erwartungswert $E(T_L)$. Wir wollen hier annehmen, daß solche Verdrängungen nur mit dem Ziel einer Durchsatzoptimierung und nicht wegen Zentralspeicher-Engpässen vorkommen.

Die Bearbeitung einer Aufgabe erfordert im Mittel E(z) Zyklen (Teilaufgaben). Über die mittlere Bearbeitungszeit für einen Zyklus kann man den maximalen Teilaufgaben-Durchsatz D_z berechnen. Der Aufgabendurchsatz D ist um die Zahl E(z) von Zyklen pro Aufgabe kleiner:

$$D = D_z \,/\, E(z) \tag{2.5}$$

Unter Durchsatz verstehen wir den maximalen Durchsatz, der sich dann einstellt, wenn immer unbearbeitete Programme bei einer Rechenanlage anstehen. Bei E(z) Zyklen (Teilaufgaben) pro Aufgabe ist der Aufgabenrechenzeit-Erwartungswert

$$E(T_R) = E(t_R) \cdot E(z). \tag{2.6}$$

3. Strategien

Wir betrachten den Einfluß verschiedener Rechnerkern(RK)-Zuteilungs- bzw. Zentralspeicher(ZSP)-Belegungs-Strategien auf den Durchsatz. Die einfachste betrachtete Strategie ist in beiden Fällen „Reihenfolge"des Eintreffens vor der Bedienstelle einhalten" (first come first serve, FCFS). Diese Strategie wird bei der Rechnerkernzuteilung häufig innerhalb einer Klasse gleichwichtiger Aufgaben (Beispiel: Prozeßrechner) angewandt. Auch Zentralspeicher-Belegungsstrategien sind fast durchweg von diesem Typ. Neben der Strategie FCFS werden für die Rechnerkernzuteilung eine *Strategie PO* (preemptive optimal) und für die Zentralspeicher-Belegung eine besonders günstige (wenn auch nicht nachweislich optimale) Strategie VERD (verdrängend) betrachtet.

*) Man könnte auch unterschiedliche Zeiten für Verdrängen und Wiederladen annehmen. Die Darstellung der Ergebnisse würde dadurch erschwert werden.

PO teilt mit unterbrechender Priorität den Rechnerkern sofort einer neu im Zentralspeicher eingetroffenen unbearbeiteten Teilaufgabe zu. Bei der entarteten Teilaufgaben-Rechenzeitverteilung Gl. (2.2) wird mit der Wahrscheinlichkeit p_g schon nach t = O Sekunden die neu eingetroffene Teilaufgabe vom Rechnerkern fertiggestellt. Kurze Teilaufgaben-Rechenzeiten (t = O) müssen also nicht am Rechnerkern warten. Nicht nach der Zeit t = O fertiggestellte Teilaufgaben haben eine negativ exponentielle Restrechenzeit-Verteilung und werden als „Langrechner" bezeichnet. Die Reihenfolge der Bearbeitung von Langrechnern ist nach Belieben wählbar und (bei Vernachlässigung von overhead) ohne Einfluß auf den Durchsatz [1]. Die Strategie PO ist nachweislich optimal [3].

Die *Zentralspeicher-Belegungsstrategie VERD* verdrängt einen Langrechner aus dem Zentral- in den Hintergrundspeicher, wenn alle Programmplätze im Zentralspeicher von Langrechnern belegt sind. Eine Langrechner-Teilaufgabe wird mit ihren Befehlen und Daten in den Zentralspeicher zurückgeladen, wenn dort keine Langrechner mehr vorhanden sind [4]. Solche wiedergeladenen Teilaufgaben gelten aus der Sicht der Strategie PO *nicht* als unbearbeitete Teilaufgaben.

4. Rechner-Modelle

Wir unterstellen eine Rechenanlage mit einem Rechnerkern, einem begrenzt großen Zentralspeicher, einem Hintergrundspeicher und einem Transportkanal zwischen Zentral- und Hintergrundspeicher. Für Vergleichszwecke werden auch Ergebnisse für den Durchsatz bei zwei parallelen Kanälen zum gleichen Hintergrundspeicher betrachtet. Die Transportzeit beinhaltet Zugriffs- und Übertragungszeit.

Verwaltungszeiten des Rechnerkerns beim Übergang der Bearbeitung von einer auf eine andere Teilaufgabe werden vernachlässigt. Unter der Strategie PO kommen sie nur sehr selten vor.

5. Durchsatz-Steigerung durch verbesserte RK-Zuteilung und neuartige ZSP-Belegung

Mit dem Begriff „Strategien-Kombination" RK-Zuteilung/ ZSP-Belegung soll die geordnete Reihenfolge zweier Strategie-Abkürzungen gemeint sein. Wir unterstellen eine entartet negativ exponentielle Teilaufgaben-Rechenzeitverteilung Gl. (2.2). Die Durchsatzberechnungen für die Strategien-Kombinationen PO/FCFS und PO/VERD sind in [3] bzw. [4] angegeben. Die Berechnung für die Kombination FCFS/FCFS findet man im Anhang.

5.1. Strategien-Kombination FCFS/FCFS

Der Durchsatz dieser Strategien-Kombination ist besonders klein und soll als Vergleichsgröße für den Durchsatz der später betrachteten besseren Strategien herangezogen werden. Bild 4 zeigt für das Rechnermodell mit 2 Plätzen im Zentralspeicher die Rechnerkernauslastung (Anhang, Gl. A.3) über dem Verhältnis der Erwartungswerte für

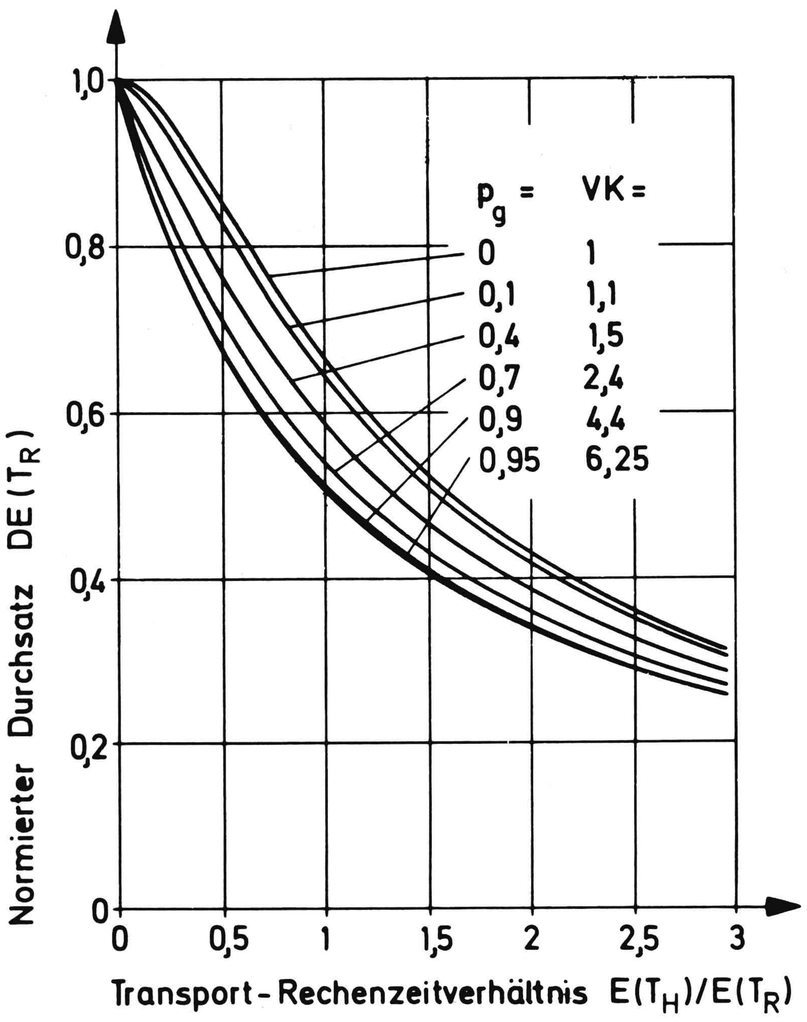


Bild 4. Strategien-Kombination RK-Zuteilung/ZSP-Belegung FCFS/FCFS.

Kurvenparameter ist p_g (Gl. 2.2) bzw. VK (Gl. 2.4).

Es gibt n = 2 Programm-Plätze im Zentralspeicher.

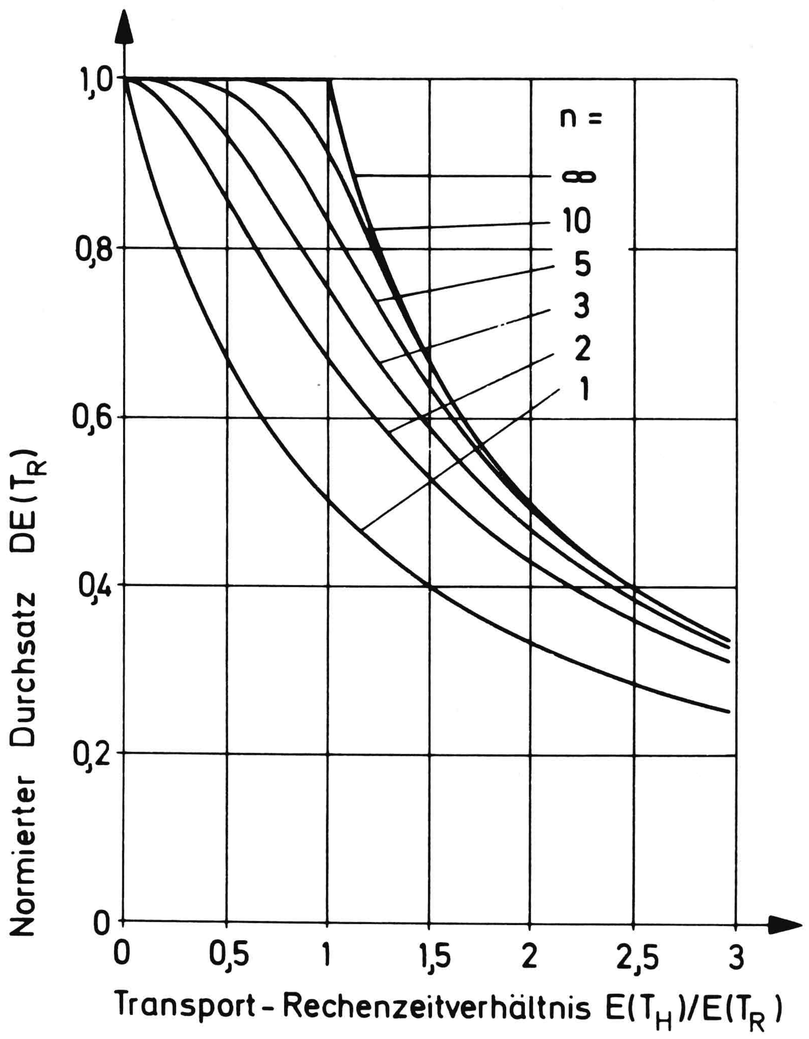


Bild 5. Strategien-Kombination RK-Zuteilung/ZSP-Belegung PO/FCFS. Kurvenparameter ist die Zahl n der Programm-Plätze im Zentralspeicher

Aufgaben-Transport und -Rechenzeit. Der Kurvenparameter p_g ist nach Gl. (2.4) ein Maß für den Variationskoeffizienten VK. Der Transportzeit-Erwartungswert $E(T_H)$ einer Aufgabe (*ohne* Verdrängungen) errechnet sich (Gl. 2.1, 2.5) aus $E(T_H) = E(z)/\mu_H = E(z) \cdot E(t_H)$. $E(T_R)$ ergibt sich aus Gl. (2.6).

$p_g = O$ bedeutet, die Teilaufgaben-Rechenzeit (Gl. 2.2) ist negativ exponentiell verteilt. Mit zunehmendem p_g und damit zunehmendem VK nimmt die Rechnerkern-Auslastung ab. Das Ergebnis für $p_g = 0.95$ entspricht etwadem, das man bei einem Programmplatz und negativ exponentiell verteilter Rechenzeit erhalten würde (vgl. Gl. 5.1, für n = 1).

Man sieht insgesamt, daß bei der RK-Zuteilung FCFS der Variationskoeffizient einen sehr großen Einfluß auf den normierten Durchsatz $DE(T_R)$ hat.

5.2 Strategien-Kombination PO/FCFS

Die RK-Auslastung für die Strategien-Kombination PO/FCFS ist in [3] berechnet. Man erhält dort mit $K = E(T_H) / E(T_R)$ den Ausdruck

$$DE(T_R) = (K^n - 1) / (K^{n+1} - 1), \qquad (5.1)$$

wobei n die Zahl der Programm-Plätze im Rechnermodell ist. Man sieht in Bild 5, wie bei gegebenem Wert K die RK-Auslastung mit steigendem Ausbau des Zentralspeichers (wachsendem n) steigt. Auch den Einfluß von Leistungssteigerungen des Rechnerkerns [↝ fallender Erwartungswert $E(T_R)$] bzw. des Kanals einschließlich Hintergrundspeichers [↝ fallender Erwartungswert $E(T_H)$] kann man leicht ablesen. Steigende Leistung bzw. Größe (beim ZSP)

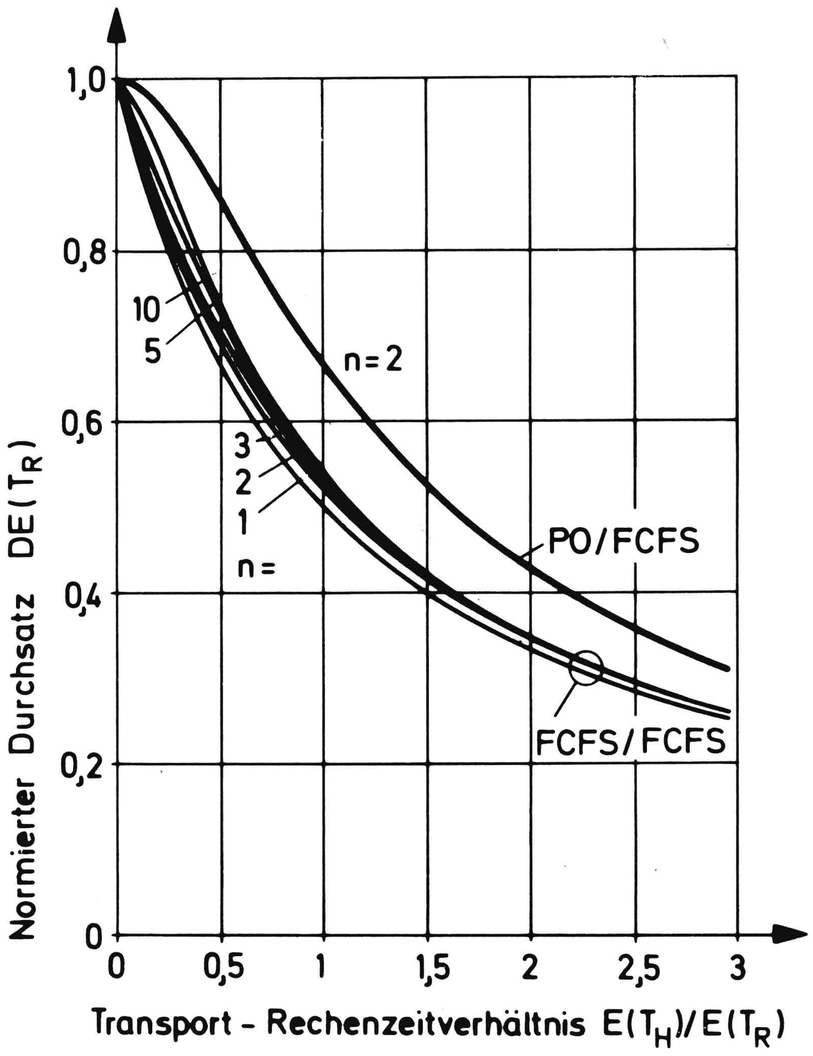


Bild 6. Strategien-Kombination RK-Zuteilung/ZSP-Belegung PO/FCFS (stark gezeichnete Kurve, n = 2 Plätze) bzw. FCFS/FCFS (dünn gezeichnete Kurven, mit verschiedener Zahl n von ZSP-Plätzen).

Der Variationskoeffizient ist VK = 3.5 (P_g = 0.85)

bedeuten steigenden Anlagen-Durchsatz. Die Kurven für $p_g = O$ in Bild 4 und für n = 2 in Bild 5 stimmen völlig überein. Tatsächlich erreicht man mit der optimalen RK-Zuteilungs-Strategie PO, *unabhängig* vom Variationskoeffizienten VK, immer dieselbe RK-Auslastung $DE(T_R)$ wie bei negativ exponentiell verteilter Rechenzeit und beliebiger RK-Zuteilung.

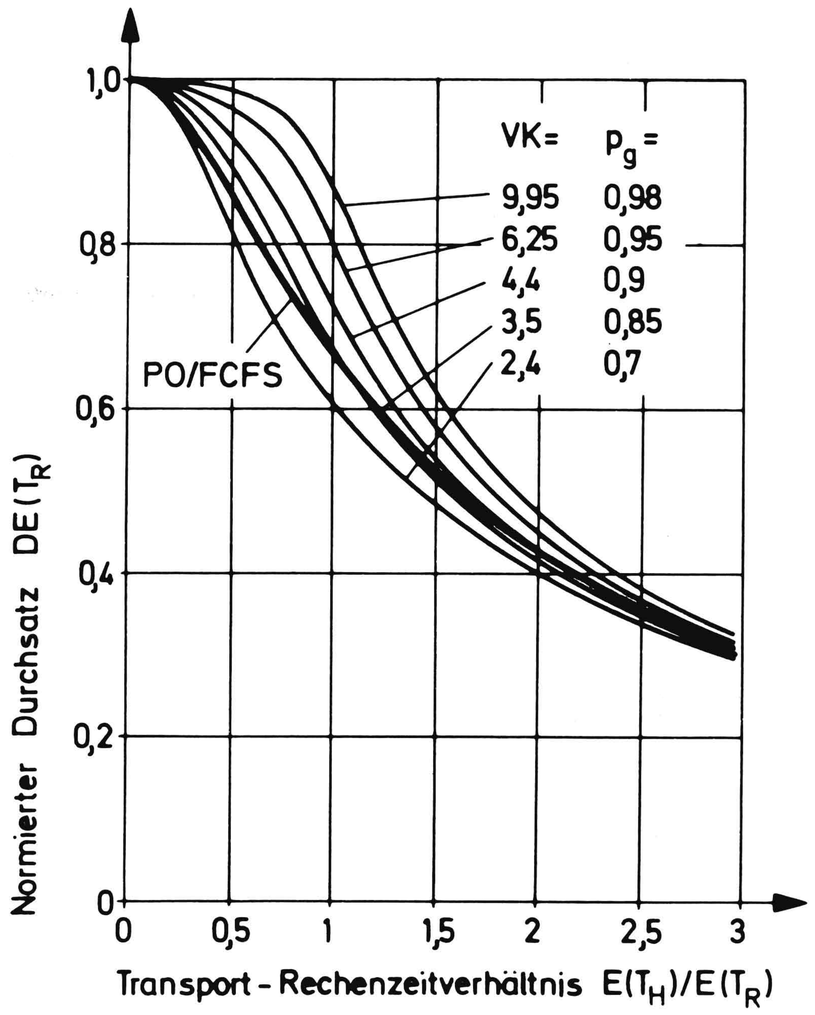
In Bild 6 wird demonstriert, wie sehr die optimale RK-Zuteilung PO schon bei 2 Plätzen im Zentralspeicher der ungünstigeren Strategie FCFS überlegen ist, denn selbst mit n = 10 Plätzen wird bei weitem nicht die mit PO bei n = 2 Plätzen erzielte Rechnerkern-Auslastung erreicht. Die dabei angenommene Teilaufgaben-Rechenzeitverteilung hat mit VK = 3,5 einen Variationskoeffizienten, wie er laut Messungen [5] für wenig streuende Rechenzeiten typisch ist. Bei stärker streuenden Rechenzeiten, z.B. dem laut Messungen häufig vorliegenden Fall VK > 10, würden die für FCFS in Bild 6 gezeigten Kurven praktisch in *eine* Kurve (etwa die für n = 1 gezeigte) zusammenfallen.

5.3. Strategien-Kombination PO/VERD

Für die Strategien PO/VERD ist die Rechnerkern-Auslastung in [4] berechnet. Man kann das dort aufgestellt Gleichungssystem nicht geschlossen auflösen und deshalb hier nur die Ergebnis-Kurven zeigen, Bild 7.

Sie gelten für 10 Verdrängungs-Warteplätze im Hintergrundspeicher. Bei der verdrängenden Strategie VERD tritt pro Verdrängungs- und pro Wiederladetransport je ein Transport-Erwartungswert $E(T_L)$ auf. Als weiteren Parameter führen wir den Aufwandsfaktor für strategisch bedingte Verdrängungen $E(T_L) / E(t_H)$ ein. In Bild 7 ist als Beispiel ein praxisorientierter Wert $E(T_L) / E(t_H) = 3$ unterstellt. Zum Vergleich ist in die Schar der dünn gezeichneten Kurven (ZSP-Belegungsstrategie VERD) eine dick gezeichnete Kurve für die ZSP-Belegungsstrategie FCFS eingetragen. Man liest ab, daß bei genügend großem Variationskoeffizienten der Rechenzeit-Verteilung die verdrängende Strategie günstiger als die nichtverdrängende (FCFS) ist.

a)



b)

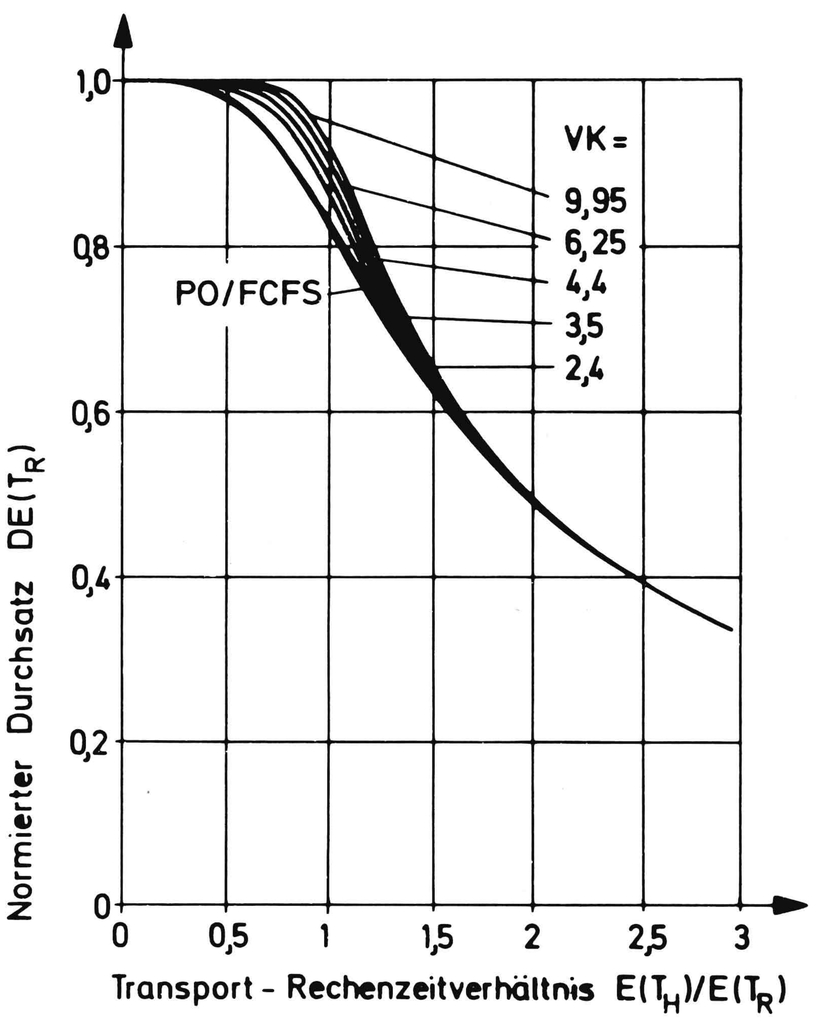


Bild 7. Strategien-Kombination PO/VERD. $\{E(T_L) / E(t_H) = 3\}$. Die Bilder a), b), gelten für 2 und 5 Programm-Plätze im ZSP. Die stark gezeichnete Kurve gilt für die Strategien-Kombination PO/FCFS. Kurvenparameter ist der Variationskoeffizient VK bzw. P_g (Gl. 2.2). Typisch für die Praxis sind Werte VK > 3 (Teilnehmerbetrieb) und VK > 10 (Stapelbetrieb).

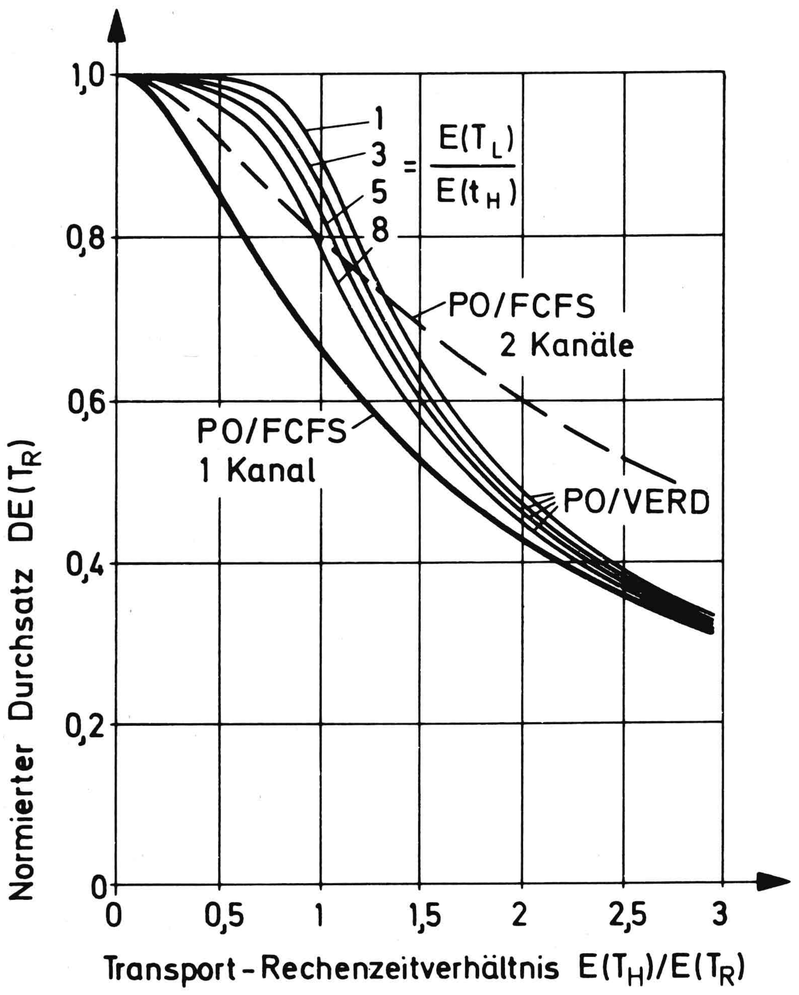
5.4. Diskussion der Ergebnisse

Bei großen Variationskoeffizienten und kleinen Zentralspeichern (⩽ 3 Plätze) kann die ZSP-Belegungsstrategie VERD eine ähnlich hohe Durchsatzsteigerung gegenüber FCFS erzielen (Bild 7) wie die optimale RK-Zuteilung PO gegenüber der Strategie FCFS (Bild 6). Auch bei größeren Zentralspeichern (z.B. 5 Plätzen) ist die Durchsatzsteigerung der verdrängenden Strategie VERD gegenüber FCFS noch spürbar. Voraussetzung für den erfolgreichen Einsatz verdrängender Strategien ist grundsätzlich eine Rechnerkern-Zuteilungs-Strategie, die die Streuung der Rechenzeiten ausnutzt.

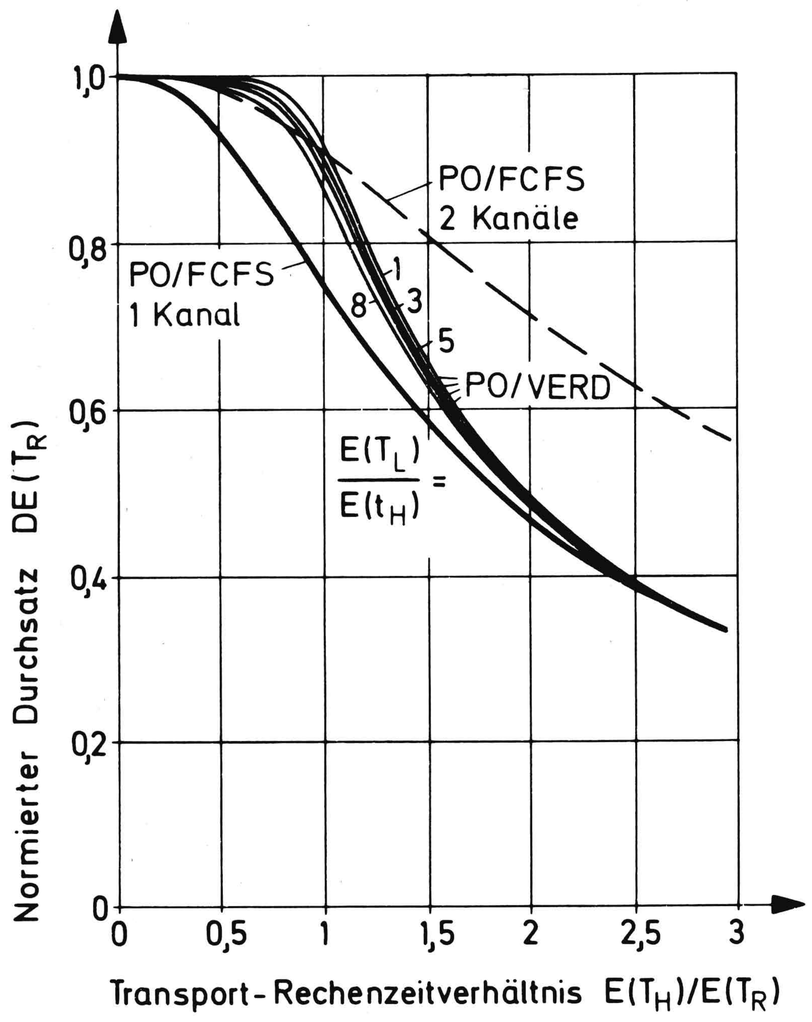
Ein weiteres Beispiel demonstriert, wie vorteilhaft verdrängende Strategien sein können. Bild 8 zeigt neben Ergebnissen der Strategien-Kombination PO/VERD (dünn gezeichnete, ähnlich verlaufende Kurven) je ein Ergebnis für die Strategien-Kombination PO/FCFS bei einem Kanal und zwei parallelen Kanälen [3].

Bei dem großen hier unterstellten Variationskoeffizienten VK ≈ 10 ist bei kleinem Zentralspeicher (⩽ 3 Plätze) und einem „vervünftigen" Verhältnis $E(T_H) / E(T_R) < 1$ die verdrängende Strategie VERD bei *einem* Kanal durchsatzgünstiger als die übliche nichtverdrängende Strategie FCFS bei *zwei* parallelen Kanälen. Das liegt daran, daß parallele Kanäle erst voll wirksam werden, wenn der Zentralspeicher genügend groß ist. Das hier für 2 Kanäle eingezeichnete Ergebnis ist eine obere Abschätzung für den in der Praxis erreichbaren Wert. Denn hier ist unterstellt, daß jeder Kanal alle Datenbestände erreichen kann, was in Wirklichkeit nicht zutrifft. Das erhöht die Bedeutung der verdrängenden Strategie.

Bild 8 vermittelt gleichzeitig noch einen Eindruck von der Abhängigkeit des Durchsatzes bei verdrängender Strategie vom Aufwandsfaktor $E(T_L) / E(t_H)$.

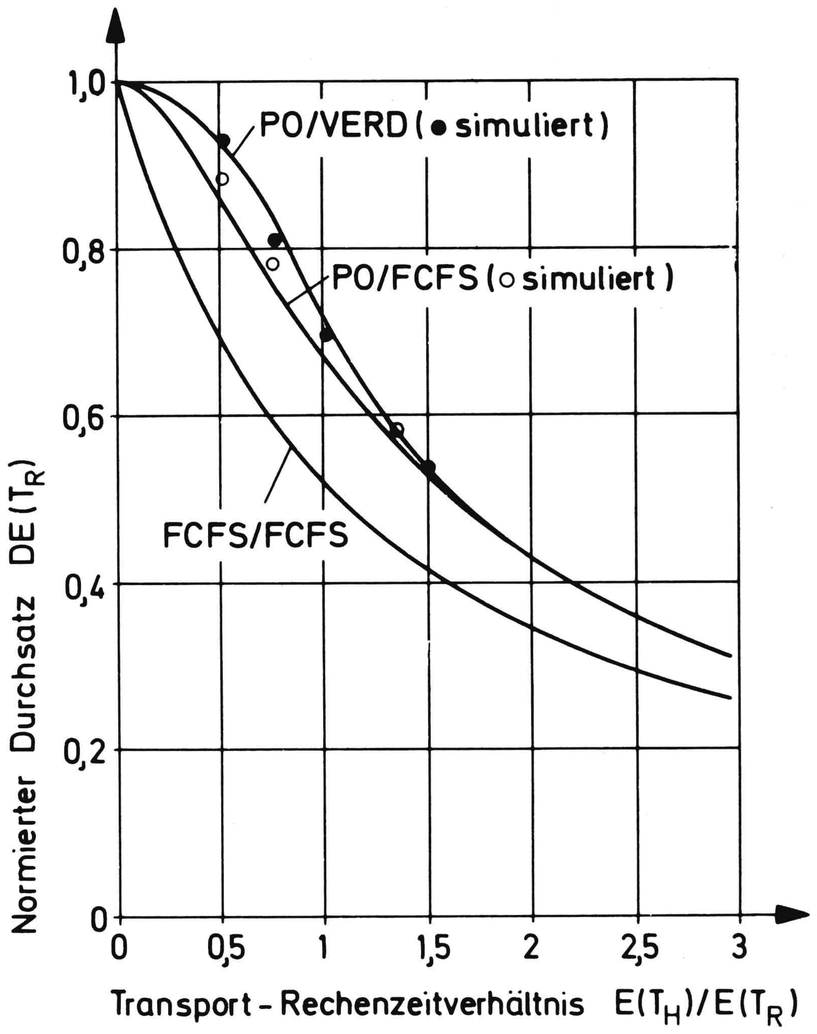


a)

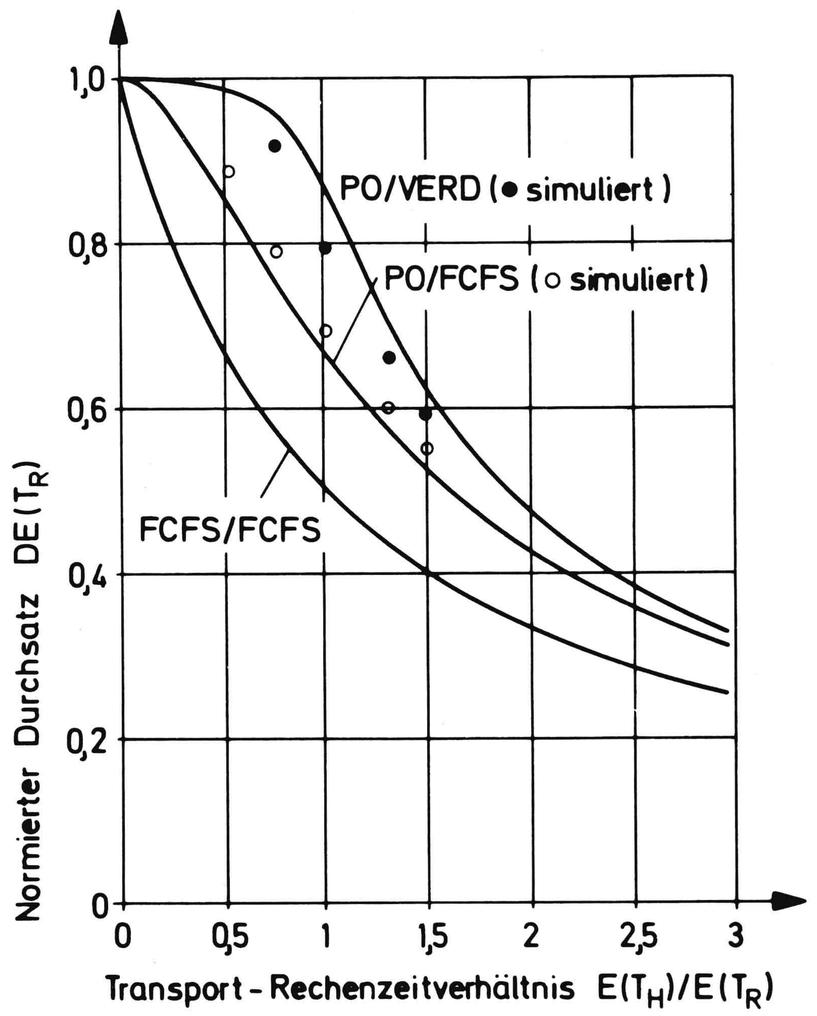


b)

Bild 8. Durchsatz-Vergleich der Strategien-Kombination PO/FCFS (1 bzw. 2 Kanäle) und PO/VERD. Parameter ist der Aufwandsfaktor für strategisch bedingte Verdrängungen $E(T_L) / E(t_H)$. Die Bilder a), b) gelten für 2 und 3 Programm-Plätze (VK = 9.95).



a)



b)

Bild 9. Normierter Durchsatz verschiedener Strategien-Kombinationen. Rechenergebnisse für entartete Rechenzeitverteilungen (Kurven) und Simulationsergebnisse für stückweise exponentielle Verteilungen (Punkte). Modell mit 2 Programm-Plätzen im Zentralspeicher und 10 Verdrängungsplätzen (bei VERD). Der zwischen den zwei unteren Kurven eingeschlossene Bereich ist durch Verbesserungen der Rechnerkernzuteilung übersprungen worden. Die ZSP-Belegungsstrategie überspringt einen weiteren Bereich und führt zur obersten Kurve.

a) VK = 3,5; $E(T_2) / E(t_H) = 2$;

b) VK = 9,95; $E(T_2) / E(t_H) = 3$;

Bild 9 zeigt schließlich noch einen eindrucksvollen Durchsatzvergleich der verschiedenen betrachteten Strategiekombinationen. Die Bilder a), b) gelten für 2 Programmplätze im Zentralspeicher und unterscheiden sich im Variationskoeffizienten sowie (nur für PO/VERD von Bedeutung) im Aufwandsfaktor für strategische Verdrängungen $E(T_L) / E(t_H)$. Man kann offensichtlich durch strategische Maßnahmen ganz erhebliche Durchsatzsteigerungen erreichen. Die natürliche, systembedingte obere Grenze ist generell durch die hier nicht eingezeichnete, aber in Bild 5 vorhandene Kurve für $n = \infty$ viele Programm-Plätze im Zentralspeicher gegeben. Diese Grenzkurve wird, besonders bei großem Variationskoeffizienten VK, bei günstigen Strategien schon mit wenigen Programm-Plätzen nahezu erreicht.

6. Vergleich der Rechenresultate für die entartete Exponential-Verteilung mit Simulationsergebnissen für zwei stückweise exponentielle Verteilungen

Gemessene Summenhäufigkeiten von Teilaufgaben-Rechenzeiten können gut durch eine stückweise negativ exponentielle Verteilung mit 2 Anteilen angenähert werden (Bild 3a):

$$P(t_R \leqslant t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1 t} & 0 \leqslant t \leqslant t_g \\ 1 - e^{-(\mu_1 - \mu_2) t_g - \mu_2 t} & t_g < t, \end{cases}$$

Erwartungswert $E(t_R) = 1/\mu_1 + (1/\mu_2 - 1/\mu_1)\, e^{-\mu_1 t_g}$.

Bisher haben wir für die Durchsatzberechnung die einfachere Näherung durch eine entartete Exponentialverteilung (Gl. 2.2) verwendet, die nur die beiden ersten Momente der Meßkurve berücksichtigt. Die Berechnung von Modellen mit begrenztem Zentralspeicher und stückweise exponentieller Verteilung steht aus und scheint auch für die Strategie PO wenig aussichtsreich zu sein*). Die Berechnungen für die entartete Verteilung sind als Näherungsrechnung für die entsprechenden stückweisen Verteilungen zu verstehen. Dabei werden kurze Teilaufgaben der stückweisen Verteilung durch solche mit der Rechenzeit Null bei der entarteten Verteilung angenähert. Die ersten beiden Momente der Verteilungen stimmen überein. Durch Simulation der Bearbeitung von Teilaufgaben mit stückweise exponentieller Verteilung und Vergleich mit Rechenergebnissen kann man Klarheit über die Brauchbarkeit der Rechenergebnisse erhalten. Für die Simulation wurden zwei verschiedene, aus Messungen abgeleitete, stückweise exponentielle Verteilungen mit sehr unterschiedlichem Variationskoeffizienten VK = 3,5 bzw. 10 verwendet. Die Parameter dieser Verteilungen findet man in [2, Tabelle 1]. Die Simulationsergebnisse für die Rechnerkernauslastung bei verschiedenen Strategien-Kombinationen findet man in Bild 9. Die Vertrauensintervalle der Simulationsergebnisse liegen bei 95 % statistischer Sicherheit innerhalb der gezeichneten Punkte. Es ergibt sich, daß die Simulationsergebnisse bei der Strategien-Kombination PO/FCFS leicht oberhalb der Rechenkurven liegen. Der Unterschied ist relativ klein und in [2] begründet.

Bei der Strategien-Kombination PO/VERD sind 10 Verdrängungs-Warteplätze angenommen (siehe [4]). Die Simulationsergebnisse liegen hier auf oder unterhalb der für die entartet negativ exponentielle Verteilung berechneten Durchsatz-Kurve. Ähnliches gilt auch bei 3 und mehr Programmplätzen im Modell. Die Simulation bestätigt zwar, daß man mit Hilfe der verdrängenden Strategie eine deutliche Durchsatzsteigerung gegenüber FCFS (vgl. Bild 9b) erreichen kann, jedoch ist der Gewinn bei wirklichkeitsnäheren Annahmen für die Rechenzeitverteilung (stückweise Verteilung Bild 3a) nicht so groß, wie für die entartete Verteilung (Bild 3b) berechnet wurde.

*) PO muß für die Bearbeitung von Teilaufgaben mit stückweiser Verteilung leicht modifiziert werden (siehe [3]).

7. Schlußbemerkungen

Die hier vorgelegten Ergebnisse sind dazu gedacht, einen Beitrag zur Dimensionierung leistungs- preisgünstiger Rechenanlagen für eine geforderte Leistung (Durchsatz) zu liefern. Die Aussagen sind nicht nur durch Simulation, sondern zum Teil auch durch Experimente an Rechenanlagen bestätigt worden. Die hier als besonders vorteilhaft hervortretenden Strategien sind sehr einfach zu realisieren und erfordern nur einen sehr kleinen Verwaltungsaufwand. Es hat sich außerdem gezeigt, daß die für den Durchsatz besonders günstige Strategien-Kombination RK-Zuteilung/ZSP-Belegung PO/VERD auch bezüglich der mittleren Antwortzeit bei Teilnehmer-Rechensystemen besonders vorteilhaft ist [6]. Damit wird meines Wissens erstmals für den Stapel-Betrieb einer Rechenanlage eine Aufgaben-Bearbeitungs-Strategien-Kombination vorgeschlagen, die nicht nur den Durchsatz, sondern gleichzeitig die mittlere Antwortzeit praktisch optimiert.

Anhang

Durchsatz-Berechnung bei gegebenen Strategien FCFS für RK-Zuteilung und ZSP-Belegung

Dürfen Kanal und Rechnerkern so lange arbeiten, wie ein Platz im Zentralspeicher frei bzw. mit einer bearbeitbaren Teilaufgabe belegt ist, dann darf man nach [3] für die Durchsatzberechnung ein zyklisches Modell der Rechenanlage benutzen. Entsprechend Bild 10 gibt es dabei n Programmplätze im Zentralspeicher, und es zirkulieren n Teilaufgaben.

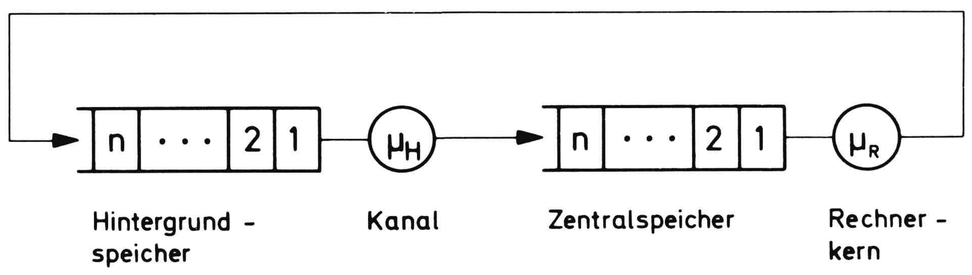


Bild 10. Zyklisches Modell

Der Kanal arbeitet mit der Fertigstellungsrate μ_H (Gl. 2.1). Der Rechnerkern stellt Teilaufgaben mit der Rate $\mu_R = 1/E(t_R)$ (vgl. Gl. 2.3) fertig. Teilaufgaben haben entweder die Rechenzeit $t_R = 0$ oder eine negativ exponentielle Restrechenzeitverteilung mit dem Erwartungswert $E(t_R \mid t \gtrdot 0) = 1/\mu$.

Da Transportzeiten und Rechenzeiten, wenn letztere nicht Null sind, negativ exponentiell verteilt sind, liegt ein Markov-Prozeß vor. Bei bekannter konstanter Zahl n von Teilaufgaben im Modell reicht zur Zustandsbeschreibung die Angabe der Zahl n_R von Teilaufgaben im Zentralspeicher aus. Die Zustandswahrscheinlichkeit für „n_R Teilaufgaben im Zentralspeicher“ wird mit P_{n_R} abgekürzt. Bei Fertigstellung einer Teilaufgabe durch den Rechnerkern geht der Zustand n_R mit unterschiedlicher stationärer Übergangswahrscheinlichkeit in Folgezustände $n_R - 1$, $n_R - 2, .., 0$ über. Der Folgezustand hängt davon ab, ob

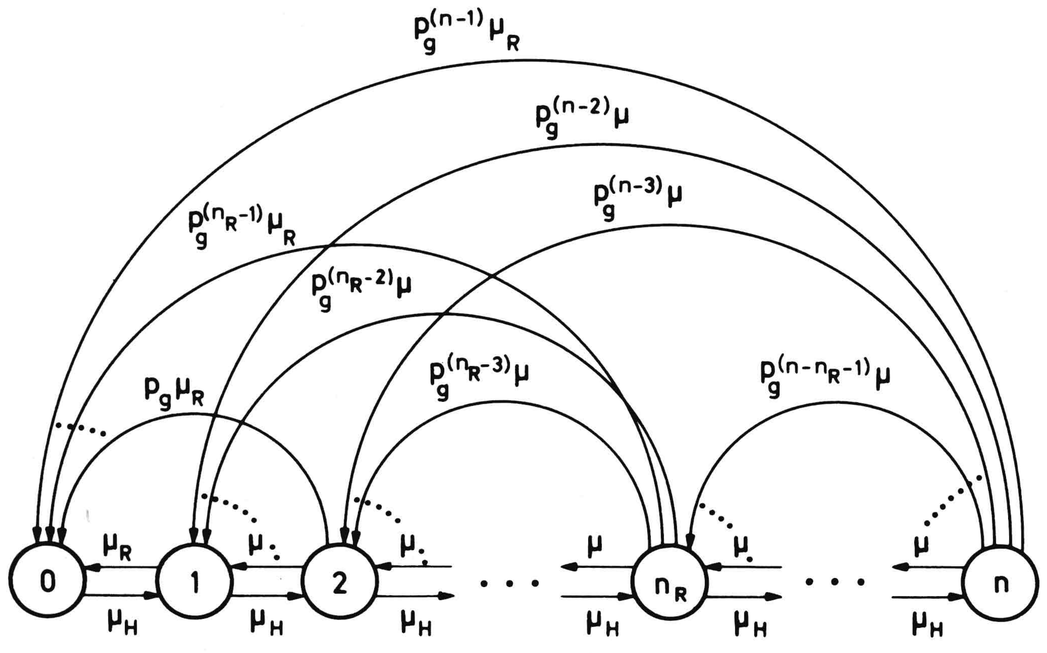


Bild 11. Übergangsdiagramm für die Zustände des Rechnermodells, Bild 10.

die jeweils nächste entsprechend der Strategie FCFS in Arbeit genommene Teilaufgabe die Rechenzeit Null hat oder ein Langrechner ist. Im Übergangsdiagramm Bild 11 sind die Fertigstellungsraten eingetragen.

Bei Fertigstellung eines Transportes ändert sich die Zahl der Teilaufgaben im Zentralspeicher von n_R nach $n_R + 1$. Aus Bild 11 leitet sich das folgende Gleichungssystem ab

$$\mu_H P_0 - \mu_R P_1 - p_g \mu_R P_2 - \ldots - p_g^{(n_R-1)} \mu_R P_{n_R} - \ldots - p_g^{(n-1)} \mu_R P_n = 0$$

$$-\mu_H P_0 + (\mu_H + \mu_R) P_1 - \mu P_2 - \ldots - p_g^{(n_R-2)} \mu P_{n_R} - \ldots - p_g^{(n-2)} \mu P_n = 0$$

$$-\mu_H P_1 + (\mu_H + \underbrace{\mu_R + p_g \mu_R}) P_2 - \ldots - p_g^{(n_R-3)} \mu P_{n_R} - \ldots - p_g^{(n-3)} \mu P_n = 0$$

.....

$$-\mu_H P_{(n-1)} + \mu_R P_n = 0$$

Außerdem gilt die Normalisierungs-Gleichung $\sum_{i=0}^{n} P_i = 1$. (A.1)

Das Gleichungssystem ist geschlossen lösbar. Man berechnet rekursiv

$$P_{n_R} = P_0 \prod_{i=1}^{n_R} K_i \qquad (A.2)$$

mit

$$K_{n-n_R} = \mu_H / (\mu_H + \mu_R - \mu [K_{n-n_R+1} \{1 + p_g K_{n-n_R+2} \{1 + p_g K_{n-n_R+3} \{\ldots + p_g K_n\}\}\}])$$

$(0 < n_R < n)$, wobei $K_m = 0$ für $m > n$ zu setzen ist.

Aus Gln. (A.1, A.2) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Leerstehen des Rechnerkerns (und des Zentralspeichers) zu

$$P_0 = 1/(1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} K_i).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Rechnerkern arbeitet, ist

$$D_z E(t_R) = 1 - P_0,$$

wobei D_z der (maximale) Teilaufgaben-Durchsatz und $E(t_R)$ der Teilaufgaben-Rechenzeiterwartungswert (Gl. 2.3) ist. Entsprechend Gl. (2.5) sind Teilaufgaben- und Aufgabendurchsatz proportional zueinander. Der Aufgaben-Rechenzeiterwartungswert ist $E(T_R) = E(t_R) \cdot E(z)$ (vgl. Gl. 2.3, 2.5). Demnach ist

$$D_z E(t_R) = D E(T_R) = 1 - P_0. \qquad (A.3)$$

Der Ausdruck $DE(T_R)$ kann auch als die „Rechnerkernauslastung" interpretiert werden.

Literatur

[1] *Conway, R. W.; Maxwell, W. L.; Miller, L. W.:* Theory of Scheduling. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1967.

[2] *Walke, B.:* Simulation und Rechnung bei der Durchsatzoptimierung für gemessene, technisch-wissenschaftliche Aufgabenprofile.
Lecture Notes in Computer Science, 8, 1974, S. 301–315, Springer, Berlin, Heidelberg.

[3] *Walke, B.:* Durchsatzberechnung für Modelle mit begrenztem Arbeitsspeicher bei einem und zwei Rechnerkernen sowie einem und zwei Transportkanälen.
Elektron. Rechenanl. 15 (1973), H. 5, S. 223–233.

[4] *Walke, B.:* Verdrängende Arbeitsspeicher-Belegungsstrategien zur Durchsatzsteigerung von Rechenanlagen.
Elektron. Rechenanl. 17 (1975), H. 4 S. 171–176.

[5] *Walke, B.:* Durchsatzberechnung für Rechenanlagen bei wählbarer Aufteilung des Arbeitsspeichers unter mehrere Programme unterschiedlichen Platzbedarfs.
Dissertationsschrift, Universität Stuttgart 1975.

[6] *Walke, B.:* Optimierung der Arbeitsspeicherbelegung in Teilnehmerrechensystemen durch Simulation.
Wiss. Ber. AEG-TELEFUNKEN 47 (1974), H. 2, S. 33–46.

Manuskripteingang bei der Redaktion am 3.11.1975